

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Донской государственный технический университет»

Кафедра «Сопротивление материалов»

**КУРС ЛЕКЦИЙ**  
**по дисциплинам**  
**«Сопротивление материалов»;**  
**«Строительная механика для архитекторов»;**  
**«Специальные вопросы сопротивления материалов»;**  
**(Часть I)**

Учебное пособие

АВТОР  
Ерёмин В.Д.

Ростов–на–Дону, 2021

УДК 669.14:539.384

Учебное пособие содержит материал для изучения обучающимися основных тем учебных дисциплин «Сопротивление материалов» и «Специальные вопросы сопротивления материалов», для закрепления читаемого курса лекций, самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графических работ, подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной (итоговой) аттестации.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Механика», «Техническая механика», «Теоретическая механика для архитекторов», «Строительная механика для архитекторов», в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 — Строительство; 07.03.01 — Архитектура; 07.03.02 — Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 — Градостроительство; 23.03.03 — Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 — Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 — Строительство уникальных зданий; 08.05.02 — Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 — Прикладная геодезия; 23.05.01 — Наземные транспортно-технологические средства.

Настоящее учебное пособие состоит из трех частей.

Содержание пособия соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования по техническим направлениям подготовки (специальностям), и «Примерной программе дисциплины «Сопротивление материалов», Москва, 2012 год, рекомендованной учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства.

УДК 669.14:539.384

Автор: канд. техн. наук, доц. В. Д. Ерёмин  
Редакция: канд. техн. наук, доц. С. В. Литвинов

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>9</b>
<b>1 Введение</b>	<b>11</b>
1.1 Курс сопротивления материалов и его задачи. Прочность, жесткость и устойчивость элементов инженерных конструкций	11
1.2 Основные допущения о свойствах материала и характере деформирования, принимаемые в сопротивлении материалов . .	13
1.3 Геометрическая схематизация элементов строительных конструкций. Понятие о расчетной схеме . . . . .	15
1.4 Нагрузки. Классификация внешних нагрузок . . . . .	18
1.5 Основные типы опор . . . . .	20
1.6 Определение опорных реакций . . . . .	22
1.7 Внутренние силы (усилия) в поперечных сечениях бруса и метод их определения . . . . .	23
1.8 Простые виды деформации . . . . .	25
1.9 Понятие о напряжении. Определение нормальных и касательных напряжений . . . . .	27
1.10 Интегральная связь между напряжениями и внутренними силами	28
1.11 Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Введение» .	30
<b>2 Геометрические характеристики плоских сечений</b>	<b>31</b>
2.1 Статические моменты, их свойства. Определение положения центра тяжести сечения . . . . .	31
2.2 Осевые и центробежные моменты инерции и их свойства . . . .	33
2.3 Полярный момент инерции и его свойства . . . . .	34
2.4 Зависимости между моментами инерции фигуры относительно параллельных осей . . . . .	35
2.5 Зависимость между моментами инерции фигуры при повороте осей . . . . .	37
2.6 Вычисление моментов инерции простейших фигур . . . . .	39
2.6.1 Прямоугольник . . . . .	39
2.6.2 Треугольник . . . . .	40

2.6.3	Круг . . . . .	42
2.6.4	Кольцо . . . . .	43
2.7	Главные оси и главные моменты инерции. Определение положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений . . . . .	44
2.8	Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга . . . . .	47
2.9	Моменты сопротивления и их свойства . . . . .	48
2.10	Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Геометрические характеристики плоских фигур» . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Центральное (осевое) растяжение или сжатие прямого бруса</b>	<b>51</b>
3.1	Центральное (осевое) растяжение или сжатие. Продольные силы и их определение . . . . .	51
3.2	Эпюры продольных сил. Правила их построения . . . . .	52
3.3	Определение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса . . . . .	56
3.4	Продольные деформации . . . . .	59
3.5	Закон Гука при центральном растяжении или сжатии . . . . .	60
3.6	Поперечные деформации . . . . .	61
3.7	Основные характеристики механических свойств материалов и их опытное изучение . . . . .	63
3.8	Расчет на прочность при центральном (осевом) растяжении или сжатии. Метод допускаемых напряжений . . . . .	65
3.9	Понятие о расчете по предельным состояниям. Расчет по I–й группе предельных состояний . . . . .	69
3.10	Учет собственного веса при центральном растяжении или сжатии	72
3.11	Брус равного сопротивления растяжению–сжатию. Ступенчато–призматические стержни (брусья) . . . . .	76
3.12	Статически неопределимые задачи при растяжении или сжатии	78
3.13	Порядок решения статически неопределимых задач . . . . .	79
3.14	Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Центральное растяжение или сжатие прямого бруса» . . . . .	83

<b>4</b>	<b>Напряжённое состояние тел</b>	<b>85</b>
4.1	Виды напряженного состояния . . . . .	85
4.2	Одноосное напряжённое состояние. Напряжения в наклонных сечениях бруса при центральном растяжении (сжатии) . . . . .	86
4.3	Закон парности касательных напряжений . . . . .	90
4.4	Плоское напряжённое состояние . . . . .	90
4.5	Пространственное напряженное состояние . . . . .	91
4.6	Обобщенный закон Гука . . . . .	93
4.7	Закон Гука для плоского напряженного состояния. Объемная деформация . . . . .	95
4.8	Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Напряженное состояние в точке» . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Понятие о теориях прочности</b>	<b>99</b>
5.1	Общие понятия. Критерии прочности . . . . .	99
5.2	Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Теории прочности» . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Сдвиг</b>	<b>108</b>
6.1	Понятие о чистом сдвиге, как частном случае плоского напряженного состояния . . . . .	108
6.2	Деформация при сдвиге. Закон Гука при чистом сдвиге . . . . .	108
6.3	Зависимость между тремя упругими постоянными $E$ , $G$ и $\mu$ . . . . .	110
6.4	Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Сдвиг» . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Кручение</b>	<b>113</b>
7.1	Основные понятия. Крутящий момент . . . . .	113
7.2	Определение крутящих моментов по мощности « $N$ » и числу оборотов вала « $n$ » . . . . .	115
7.3	Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого поперечного сечения . . . . .	116
7.4	Расчет стержня круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении . . . . .	121
7.5	Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Кручение» . . . . .	125

<b>8</b>	<b>Изгиб прямолинейных брусьев</b>	<b>127</b>
8.1	Чистый и плоский поперечный изгибы. Основные определения и понятия . . . . .	127
8.2	Основные типы опор и балок . . . . .	129
8.3	Основные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб балок .	130
8.4	Определение опорных реакций в балках и рамах . . . . .	132
8.5	Внутренние силовые факторы при изгибе. Основные определения и правила знаков . . . . .	135
8.6	Правила знаков внутренних силовых факторов для балок . . . .	136
8.7	Правила знаков внутренних силовых факторов для рам . . . . .	138
8.8	Дифференциальные зависимости при плоском изгибе . . . . .	138
8.9	Эпюры внутренних силовых факторов. Правила их построения	142
8.10	Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для балок . . . . .	144
8.11	Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для рам . . . . .	145
8.12	Чистый изгиб балки. Основные гипотезы . . . . .	146
8.13	Определение нормальных напряжений . . . . .	148
	8.13.1 Статическая сторона задачи. . . . .	149
	8.13.2 Геометрическая сторона задачи . . . . .	149
	8.13.3 Физическая сторона задачи . . . . .	151
	8.13.4 Синтез уравнений. . . . .	151
8.14	Расчет балок на прочность при изгибе . . . . .	153
8.15	Рациональные формы поперечных сечений балок . . . . .	160
8.16	Плоский поперечный изгиб. Касательные напряжения при изгибе	162
8.17	Касательные напряжения в балках прямоугольного поперечного сечения . . . . .	166
8.18	Касательные напряжения в балках круглого поперечного сечения	168
8.19	Касательные напряжения в балках двутаврового поперечного сечения . . . . .	169
8.20	Анализ напряженного состояния при изгибе. Главные напряжения при изгибе . . . . .	173
8.21	Полная проверка прочности балки при плоском поперечном изгибе	176
8.22	Деформация балок. Основные понятия и определения . . . . .	177

8.23	Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки . . . . .	180
8.24	Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки . . . . .	184
8.25	Правила уравнивания одноимённых постоянных интегрирования. Правила Клебша . . . . .	187
8.26	Метод начальных параметров . . . . .	189
8.27	Проверка правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов . . . . .	195
8.28	Расчет балок на жесткость. Проверка выполнения условия жесткости балки . . . . .	196
8.29	Раскрытие статической неопределимости упругих стержневых систем . . . . .	197
8.30	Порядок решения статически неопределимых задач . . . . .	200
8.31	Потенциальная энергия деформации балок . . . . .	201
8.32	Метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации . . . . .	204
8.33	Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора . . . . .	206
8.34	Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора с использованием правила Верещагина . . . . .	208
8.35	Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Изгиб прямолинейных брусьев» . . . . .	213

**Библиографический список** **216**

**А Сортамент прокатной стали** **217**

A.1	Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240—97 . . . . .	217
A.2	Выборка двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок по ГОСТ Р 57837—2017 . . . . .	219
A.3	Уголки стальные горячекатаные равнополочные по ГОСТ 8509—93 . . . . .	227
A.4	Уголки стальные горячекатаные неравнополочные по ГОСТ 8510—86 . . . . .	232
A.5	Двутавры стальные горячекатаные по ГОСТ 8239—89 . . . . .	236

<b>В</b>	<b>Геометрические характеристики простейших фигур</b>	<b>238</b>
<b>С</b>	<b>Перевод единиц. Механические характеристики материалов</b>	<b>242</b>
С.1	Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и внесистемными единицами . . . . .	242
С.2	Механические характеристики материалов . . . . .	243
<b>Д</b>	<b>Устойчивость сжатых стержней</b>	<b>244</b>
<b>Е</b>	<b>Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок</b>	<b>246</b>
Е.1	Правила построения и контроля эпюр (метод начальных параметров) . . . . .	246
Е.2	Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок . . . . .	248

## Предисловие

Сопротивление материалов — наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций, играет важную роль в профессиональной подготовке инженеров любой специальности.

Сопротивление материалов — одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами технических направлений подготовки (специальностей).

Самостоятельная работа обучающихся является одним из важнейших вопросов в условиях реализации компетентностной модели образования. Это связано не только с постоянным увеличением доли самостоятельной работы при освоении учебной дисциплины, но и с современным пониманием образования как жизненной стратегии личности.

Для усвоения материала этой дисциплины необходимо обязательно составлять конспект лекций и научиться самостоятельно решать задачи. Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями, а также обратиться за консультацией к преподавателю.

Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на аудиторное изучение этих дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить обучающихся пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Учебное пособие состоит из трех частей.

В первой части пособия анализируется напряженное состояние тела и излагаются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций,

испытывающих простые виды деформаций (центральное растяжение или сжатие, сдвиг и кручение), по допускаемым напряжениям и предельным состояниям.

Во второй части учебного пособия рассматриваются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, работающих на изгиб.

В третьей части пособия рассматриваются вопросы расчета бруса на сложное сопротивление, на устойчивость, а также задачи учета динамических нагрузок в сопротивлении материалов.

Учебное пособие содержит материал для изучения студентами основных тем следующих учебных дисциплин кафедры:

- сопротивление материалов;
- специальные вопросы сопротивления материалов;
- механика;
- строительная механика для архитекторов;
- теоретическая механика для архитекторов.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 — Строительство; 07.03.01 — Архитектура; 07.03.02 — Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 — Градостроительство; 23.03.03 — Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 — Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 — Строительство уникальных зданий; 08.05.02 — Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 — Прикладная геодезия; 23.05.01 — Наземные транспортно-технологические средства, для закрепления читаемого курса лекций, для подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся, при самостоятельном выполнении домашних, контрольных и расчетно-графических работ.

# Тема 1. Введение

## 1.1. Курс сопротивления материалов и его задачи. Прочность, жесткость и устойчивость элементов инженерных конструкций

Сопротивление материалов является одним из разделов *механики деформируемого твердого* тела, где изучаются законы движения и равновесия твердых тел в условиях их деформирования при различных воздействиях.

Задачей сопротивления материалов является создание теоретических и экспериментальных основ для установления требуемых размеров элементов, входящих в состав конструкций и сооружений. При этом должна быть обеспечена *надежность* эксплуатации и *экономичность* конструкции, в значительной мере определяемая расходом материала.

*Надежность* — свойство конструкции выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени. Надежность, безотказность изделия (машины, конструкции, детали) связывается с определенным сроком службы. В большинстве случаев под сроком службы понимается время работы изделия под нагрузкой или число циклов нагружения. Надежность конструкции обеспечена, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при гарантированной долговечности.

*Прочность* — способность конструкции в целом и ее отдельных элементов воспринимать определенную нагрузку без разрушения. Первой задачей обеспечения прочности проектируемой конструкции является получение гарантии против ее разрушения при действии на нее определенных внешних сил. Однако в большинстве случаев приходится считаться не только с опасностью разрушения, но и с величиной деформаций и их характером.

*Разрушение* (полное или местное) — разделение конструкции на несколько частей, появление видимых трещин, отколов. Если изменения формы и размеров (деформации) конструкции при действии на нее внешних сил *невелики* и не мешают ее эксплуатации, то такая конструкция обладает необходимой *жесткостью*. Обычно жесткость конструкций регламентируется нормами проектирования.

*Деформация* — изменение взаимного расположения частиц тела под действием внешних сил, вызывающая, как правило, изменение его формы и размеров.

*Деформации* различают:

а) *упругие*, то есть имеющие обратимый характер (полностью исчезающие после прекращения действия внешних сил). При таких деформациях тело после снятия нагрузки полностью восстанавливает свои прежние форму и размеры;

б) *остаточные*, то есть необратимые и не исчезающие после прекращения действия внешних сил. Остаточная деформация, не сопровождающаяся местным разрушением, называется *пластической*.

в) деформации, зависящие от времени, принято называть *вязкими*;

г) увеличение деформации тела при постоянных внешних нагрузках (осадка фундамента зданий и сооружений, постепенное удлинение каната, несущего груз и т. д.) называется *ползучестью*.

Кроме того, различают *общую деформацию*, распространяющуюся на весь объем тела, и *местную деформацию*, происходящую лишь в малой части этого объема.

Деформации конструкции при действии на нее внешней нагрузки должны быть невелики (по сравнению с ее линейными размерами) и не должны мешать ее эксплуатации. Чрезмерные деформации могут совершенно изменить условия работы конструкции и исключить возможность выполнения ею своего назначения в полной мере.

Вопрос о проверке прочности следует рассматривать в широком смысле, понимая под его решением обеспечение не только прочности против разрушения, но и определенной величины и характера деформаций.

*Устойчивость* конструкции — это ее способность сохранять вплоть до разрушения первоначальную форму равновесия. Нарушение первоначально заданной формы равновесия, называемое потерей устойчивости, опасно также как и разрушение. Понятие устойчивости относится, в основном, к сжатым элементам конструкций.

## 1.2. Основные допущения о свойствах материала и характере деформирования, принимаемые в сопротивлении материалов

Для решения основной задачи сопротивления материалов (определения рациональных размеров) вводят ряд допущений и гипотез, позволяющих сложную работу элементов конструкции свести к простым расчетным моделям и схемам и получить простые инженерные формулы для определения напряженно-деформированного состояния:

1. *Гипотеза идеальной или абсолютной упругости* предполагает полную обратимость процесса деформирования тела в стадии нагружения и разгрузки, то есть до приложения внешних сил в рассматриваемом элементе отсутствуют внутренние силы и деформации, возникающие в процессе нагружения элемента и исчезающие после снятия нагрузки.

2. *Гипотеза о сплошности материала* предполагает, что упругое тело полностью заполняет объем и не имеет в нем пустот и разрывов. Эта гипотеза позволяет рассматривать деформации и перемещения как неразрывные функции координат и в полном объеме использовать математический аппарат теории непрерывных функций.

3. *Гипотеза однородности материала* допускает, что в любых точках тела под действием одних и тех же напряжений возникают одинаковые деформации, то есть в окрестности произвольной точки физические свойства и соответствующие им механические характеристики материала одинаковы.

4. *Гипотеза шаровой изотропии* предполагает, что для некоторых материалов (например, металлов) физические свойства и механические характеристики одинаковы по всем направлениям, проведенным в окрестности произвольной точки.

5. *Гипотеза малости деформаций* предполагает, что перемещения точек рассматриваемого элемента малы по сравнению с его размерами, а относительные деформации малы по сравнению с единицей. Эта гипотеза позволяет пренебрегать изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и составлять уравнения статики для недеформированного тела.

6. *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и нагрузками (напряжениями) — закон Гука.* Согласно этой гипотезе считают, что для большинства материалов между деформациями и напряжениями на определенной с момента нагружения стадии устанавливается прямая пропорциональная зависимость.

7. *Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли)* предполагает, что поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его геометрической оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации.

Наряду с перечисленными гипотезами в курсе сопротивления материалов рассматривают два основных принципа.

1. *Принцип независимости действия сил.* Согласно этому принципу действие на элемент конструкции группы сил вызывает в одних и тех же точках такие же напряжения, перемещения и деформации, что и алгебраическая сумма нагрузок, полученная от каждой отдельной силы этой группы при любом порядке нагружения (рис. 1.1).

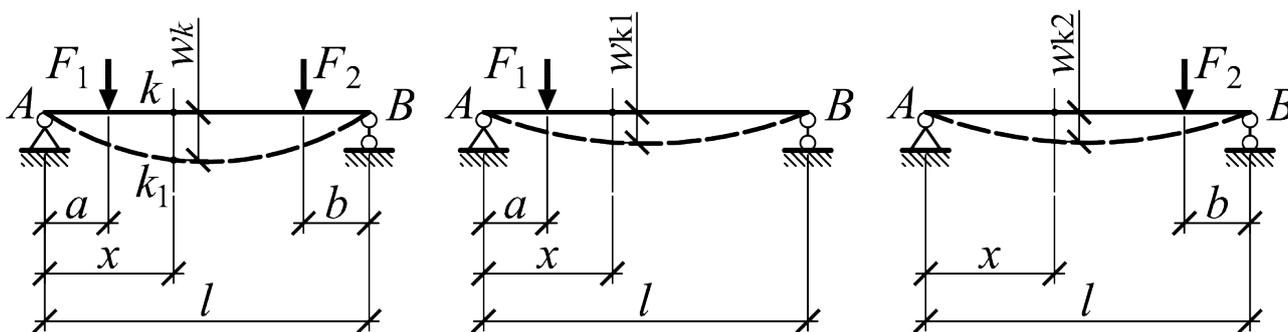


Рис. 1.1. Принцип независимости действия сил

Сформулированное положение называется еще принципом сложения действия сил, или принципом суперпозиции.

2. *Принцип Сен-Венана,* который излагается в двух вариантах:

а) если на какой-либо малой площадке элемента конструкции приложена уравновешенная система сил, то она вызывает в этом элементе напряжения, достаточно быстро убывающие по мере удаления от места приложения нагрузок.

На оси бруса построен график сжимающих нормальных напряжений от уравновешенной нагрузки  $F$  (рис. 1.2);

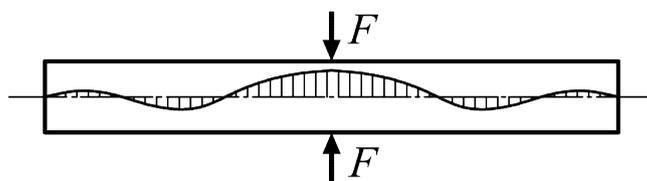


Рис. 1.2. Принцип Сен-Венана

б) в точках деформируемого элемента конструкции, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения и деформации практически мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок

Гипотезы и принципы позволяют достаточно просто рассматривать расчетные модели и расчетные схемы конструктивных элементов.

### 1.3. Геометрическая схематизация элементов строительных конструкций. Понятие о расчетной схеме

Геометрическая форма элементов конструкций бывает весьма сложной.

Учет всех особенностей геометрической формы часто нецелесообразен, так как приводит к сложным моделям. Для определения напряженного и деформированного состояний применяют упрощенные схематизированные модели формы элементов конструкций. Основными элементами формы в моделях прочностной надежности являются стержень, пластинка, пространственное тело (массив), оболочка, тонкостенные стержни (рис. 1.3).

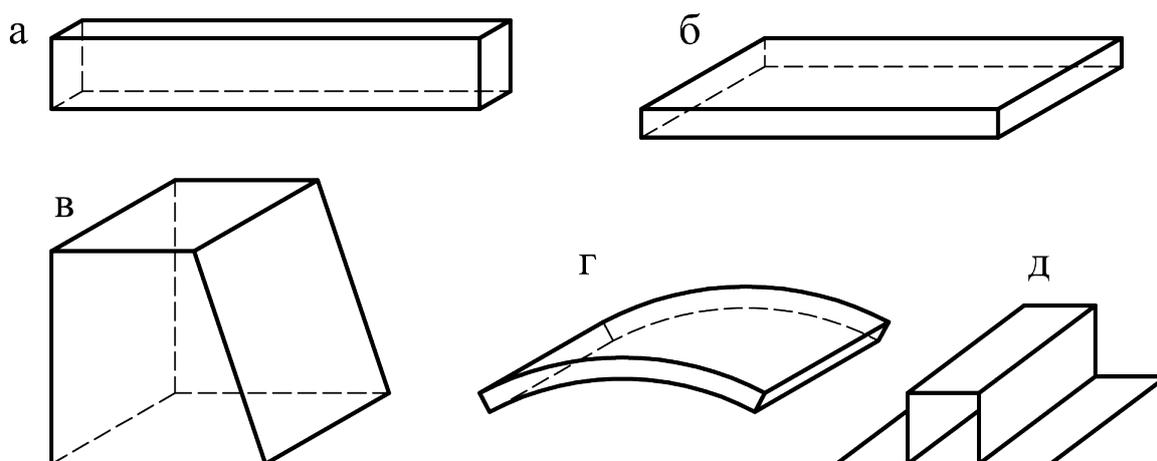


Рис. 1.3. Основные элементы формы в моделях прочностной надежности: а — стержень; б — пластинка; в — объемное тело; г — оболочка; д — тонкостенные стержни

Модели формы представляют схематизированное описание геометрии элемента с помощью типовых элементов.

К первому типу геометрической формы элементов конструкции относятся стержни, у которых длина значительно больше размеров поперечного сечения.

Геометрическими элементами стержня являются его ось и поперечное сечение.

**Определение 1.1** *Ось стержня — линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений стержня.*

**Определение 1.2** *Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.*

Поперечное сечение образуется при пересечении стержня плоскостью, перпендикулярной его оси. В зависимости от формы оси стержни могут быть прямыми, кривыми, плоскими и пространственными. Поперечные сечения стержня могут быть одинаковыми или различными по размерам (стержни постоянного или переменного сечения). В несущих строительных конструкциях чаще всего встречаются прямые стержни постоянного или ступенчато постоянного сечения.

В технике и строительстве часто применяются тонкостенные стержни, у которых один размер поперечного сечения мал по отношению к другому и оба малы по отношению к длине стержня. Расчет таких тонкостенных стержней имеет специфические особенности.

В сопротивлении материалов используются термины «волокно» и «слой».

**Определение 1.3** *Волокном называют материальную линию, параллельную оси стержня и имеющую бесконечно малую площадь поперечного сечения.*

**Определение 1.4** *Совокупность волокон, лежащих на плоскости или на поверхности, образуют слой стержня.*

**Определение 1.5** *Оболочка — тело, ограниченное двумя близкими поверхностями.*

Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью.

По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические, конические, сферические, волнистые и др. К оболочкам относятся стенки тонкостенных резервуаров, купола зданий и т. д.

**Определение 1.6** *Пластина — частный случай оболочки, когда срединная поверхность представляет собой плоскость.*

Толщина пластины намного меньше двух других размеров. К пластинам относятся плоские днища и крышки резервуаров, перекрытия инженерных сооружений и др.

Значительное превалирование одного характерного размера над двумя другими — в стержнях и малость одного размера по сравнению с двумя другими — в оболочках и пластинах позволяют существенно упростить анализ их напряженного и деформированного состояния.

**Определение 1.7** *Пространственное тело (массив) — модель формы элемента конструкции, в которой размеры по всем направлениям соизмеримы. К ним относятся фундаменты зданий и сооружений, опорные стенки и т. п.*

**Определение 1.8** *Механической системой называется совокупность твердых тел, в которой положение и движение каждого тела определяется положением и движением остальных.*

**Определение 1.9** *Расчетной схемой системы называется ее упрощенное представление, принимаемое за основу прочностного расчета.*

Расчетная схема определяется: совокупностью принимаемых гипотез; методикой расчета; упрощенным представлением элементов; условным представлением нагрузок; пренебрежением некоторыми размерами и конструктивными деталями, которые практически не сказываются на их прочности.

При расчете реальной конструкции ее заменяют идеализированной упрощенной системой — расчетной схемой. Расчетная схема включает в себя:

элементы конструкции (стержни, оболочки, пластины, массивы), способы соединения элементов конструкции, опорные устройства.

Обычно стержни соединяются между собой упругоподатливо, однако в различных случаях такое соединение в расчетных схемах трактуется различно:

- в рамах (рис. 1.4, а) — жесткое соединение в узлах;
- в фермах (рис. 1.4, б) — шарнирное соединение стержней в узлах.

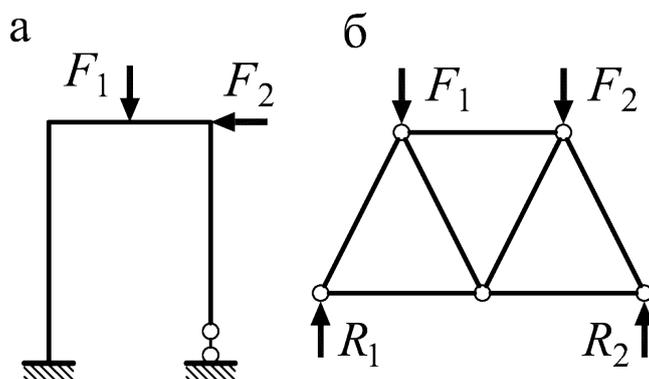


Рис. 1.4. Примеры соединения стержней в узлах

Таким образом, реальные элементы конструкций и сооружений могут быть с достаточной точностью представлены сочетанием более простых моделей формы (стержня, пластины или оболочки, пространственного тела).

#### 1.4. Нагрузки. Классификация внешних нагрузок

В процессе работы или эксплуатации конструкций и сооружений их элементы испытывают действие различных нагрузок.

**Определение 1.10** *Нагрузки — это силы, передающиеся рассматриваемым телам от других, соприкасающихся с ними тел, или от внешней среды. Все нагрузки делятся на силы внешние и силы внутренние.*

**Определение 1.11** *Внешними называются нагрузки, действующие на конструкцию в целом, при рассмотрении ее как твердого тела.*

**Определение 1.12** *Внутренними называются силы, возникающие внутри конструкции в результате деформаций от действия внешних нагрузок.*

Нагрузки, приложенные к телу, распределены по некоторым площадям его поверхности (поверхностные нагрузки) или по объему (объемные нагрузки).

Для их представления используют следующие модели: распределенные нагрузки, сосредоточенные и объемные силы.

Все поверхностные нагрузки являются распределенными по некоторой поверхности конструкции. Распределенные нагрузки характеризуются интенсивностью, которая может быть переменной или постоянной. При расчете стержней распределенная по площади нагрузка приводится к линейной нагрузке, распределенной по длине стержня.

Если размеры площади приложения нагрузки малы по сравнению с размерами тела, то в этом случае нагрузка может быть представлена в виде силы, приложенной к математической точке поверхности тела. Такую нагрузку называют *сосредоточенной*.

*Так как сила возникает в результате взаимодействия тел и давление между ними передается через площадку бóльших или меньших размеров, то в действительности сосредоточенных сил не существует.*

Нагрузки, распределенные по всему объему (приложены к каждой частице внутри тела), называются *объемными* (собственный вес, силы инерции).

В ряде случаев нагрузки моделируются как моментные в виде сосредоточенных моментов (пар сил) и моментов, распределенных по поверхности или по линии.

К внешним силам относятся температурные воздействия, возникающие при перемене температуры, а также инерционные силы при поступательном и вращательном движениях.

Внешние нагрузки делятся на активные и реактивные (реакции опорных закреплений).

*Реактивные нагрузки* подлежат определению из уравнений статики. Если уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций, то к ним добавляют уравнения, характеризующие деформации конструкции.

Деление внешних нагрузок на поверхностные, линейные и сосредоточенные — три степени абстракции, используемой в расчетах.

Нагрузки разделяют на стационарные (постоянные, статические) и нестационарные (временные, переменные):

**Постоянные нагрузки** действуют в течение всего периода существования конструкции (например, собственный вес конструкции).

**Статические нагрузки** — нагрузки, сообщаемые телу малые ускорения, следовательно, малы и силы инерции, которые можно не учитывать.

**Временные нагрузки** — нагрузки, действующие в течение ограниченного отрезка времени (например, снеговая или ветровая нагрузки).

**Переменные нагрузки** — это нагружение, изменяющееся во времени.

Наиболее важный класс переменных нагрузок — циклические нагрузки.

Совокупность напряжений от некоторого значения  $\sigma_{\max}$  до  $\sigma_{\min}$  и снова до  $\sigma_{\max}$ , называется циклом напряжений, а сами напряжения — циклическими.

Для *динамического* действия нагрузки характерно быстрое изменение во времени ее величины (высокая скорость возрастания нагрузки), что вызывает силы инерции, которые необходимо учитывать.

Модели нагружения должны учитывать воздействие полей и сред. Наиболее часто встречается воздействие температурного поля. Пониженная или повышенная температура влияют на механическую прочность материала.

Таким образом, модели нагружения содержат схематизацию внешних нагрузок по величине, распределению, времени, воздействию внешних полей и сред.

## 1.5. Основные типы опор

Для того чтобы элементы конструкции могли воспринимать внешнюю нагрузку и передавать ее на основание, они должны быть соединены с ним опорными связями (опорами). Тип опоры устанавливается по ее характеристикам — кинематической (перемещений, допускаемых и задерживаемых опорными связями) и статической (силовое сопротивление).

Различают три основных типа опорных устройств (в плоской системе сил):

### **Защемление или заделка (рис. 1.5, а)**

Защемленный конец стержня А не может смещаться поступательно в горизонтальном и вертикальном направлениях, ни поворачиваться. В такой



Рис. 1.5. Защемление или заделка

опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила  $R_A$ , препятствующая вертикальному смещению, горизонтальная сила  $H_A$ , исключающая горизонтальное смещение, и момент  $M_A$ , препятствующий повороту (рис. 1.5, б).

### Цилиндрическая шарнирно–неподвижная опора (рис. 1.6, а)



Рис. 1.6. Шарнирно–неподвижная опора

Эта опора не позволяет сечению стержня в точке  $A$  иметь поступательные перемещения в горизонтальном и вертикальном направлениях, но при этом возможен поворот сечения в одной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира. В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила  $R_A$ , препятствующая вертикальному смещению, и горизонтальная сила  $H_A$ , исключающая горизонтальное смещение (рис. 1.6, б).

### Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (рис. 1.7, а)



Рис. 1.7. Шарнирно–подвижная опора

Эта опора позволяет сечению стержня в точке  $B$  поворачиваться вокруг шарнира и перемещаться в горизонтальном направлении, но не позволяет

перемещаться по вертикали. В такой опоре возникает только реакция  $R_B$  (рис. 1.7, б).

Для обеспечения неподвижности элементов конструкции, то есть, чтобы они могли сопротивляться приложенным внешним силам, необходимо защементировать один их конец или в одном их сечении устроить шарнирно–неподвижную опору, а в другом — шарнирно–подвижную опору.

*Таким образом, наименьшее число связей, не позволяющих элементам конструкции перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.*

## 1.6. Определение опорных реакций

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах любой конструкции, необходимо найти все действующие на нее нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

При действии на стержень плоской системы внешних сил, реакции опор действуют в той же плоскости, а поэтому реакции опор определяются по правилам теоретической механики из условий равновесия плоской системы сил. Плоская система может находиться в равновесии только при условии не пересечения направления реакций в одной точке.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных комбинациях:

а) Первая комбинация:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \text{ — сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum F_z = 0 & \text{ — сумма проекций всех сил на} \\ & \text{вертикальную ось } z \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & \text{ — сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю.} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Уравнение  $\sum M_B = 0$  (сумма моментов всех сил относительно точки  $B$  равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

б) Вторая комбинация:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \text{ — сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & \text{ — сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю.} \\ \sum M_B = 0 & \text{ — сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } B \text{ равна нулю.}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Уравнение  $\sum F_z = 0$  (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

Уравнения равновесия нужно составлять так, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная опорная реакция. Это облегчит нахождение опорных реакций.

## 1.7. Внутренние силы (усилия) в поперечных сечениях бруса и метод их определения

Под влиянием внешних сил в теле происходит деформация и возникают дополнительные внутренние силы.

*В дальнейшем при определении внутренних сил мы будем подразумевать не их абсолютные значения, а только те изменения, которые вызваны действующими на тело нагрузками.*

Внутренние силы упругости увеличиваются с возрастанием внешних сил, но только до определенного предела, после превышения которого тело разрушается.

Для расчета конструкций на прочность необходимо уметь находить внутренние силы по заданным внешним нагрузкам. Чтобы установить численные значения внутренних сил, возникающих в результате деформации, вызванной внешними силами, применяют *метод сечений*.

Пусть к элементу конструкции приложена система нагрузок, включающая в себя заданные силы и опорные реакции (рис. 1.8). Под действием рассматриваемых сил элемент находится в равновесии.

Метод сечений сводится к четырем действиям:

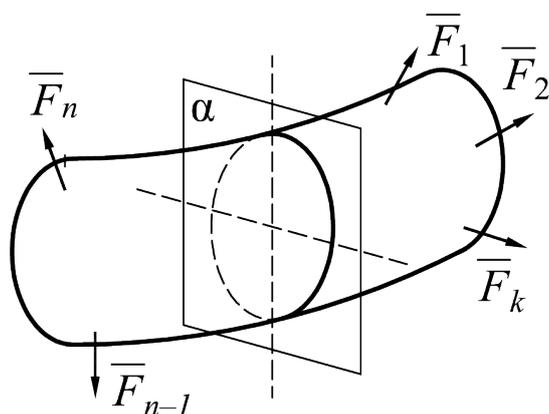


Рис. 1.8. Метод сечений

1. Плоскостью  $\alpha$ , проходящей через внутреннюю точку, в которой необходимо определить искомое усилие, разрезают (мысленно) тело на две части (рис. 1.8).

2. Для каждой из частей прикладывают в сечениях внутренние силы взаимодействия в каждой точке рассматриваемого сечения (рис. 1.9).

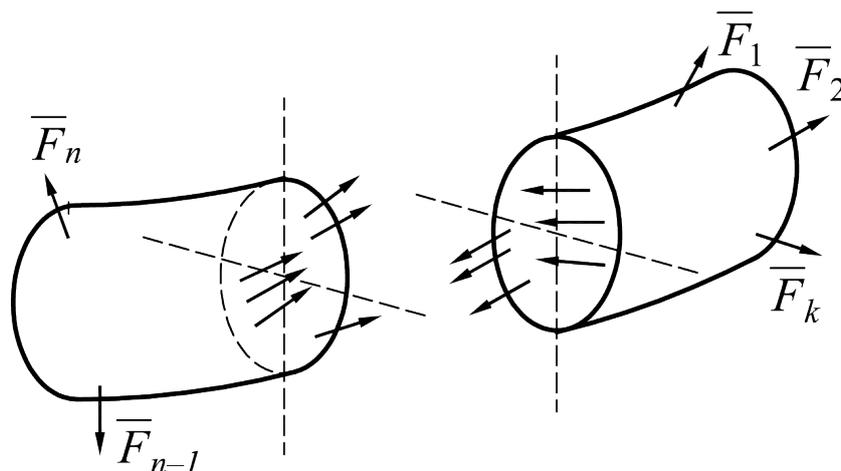


Рис. 1.9. Метод сечений

3. Отбрасывая одну из частей стержня (желательно наиболее сложную), заменяют внутренние силы статически эквивалентными им главным вектором  $R$  и главным моментом  $M$  (рис. 1.10).

4. В соответствии с гипотезой о малости деформаций составляют как для недеформируемого тела уравнения равновесия для всех сил (внешних и

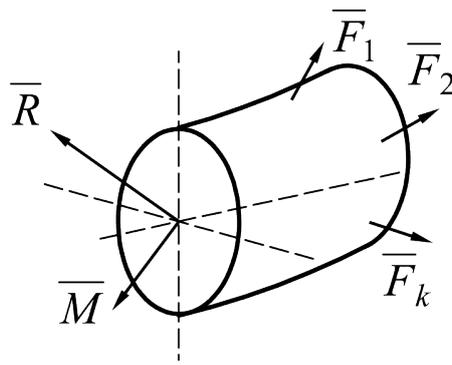


Рис. 1.10. Метод сечений

внутренних), действующих на оставшуюся часть:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; & \sum M_x &= 0; \\ \sum F_y &= 0; & \sum M_y &= 0; \\ \sum F_z &= 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Из шести уравнений статики можно определить (выразить) шесть составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил.

**Определение 1.13** *Составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил, возникающие в поперечном сечении бруса, называются внутренними силовыми факторами (или усилиями) в этом сечении.*

Указанные шесть внутренних силовых факторов имеют следующие наименования:

- $N$  — продольная сила;
- $Q_y$  и  $Q_z$  — поперечные силы;
- $M_x = M_k$  — крутящий момент;
- $M_y$  и  $M_z$  — изгибающие моменты.

Индексы в обозначениях силовых факторов ( $x, y, z$ ) показывают, относительно каких осей они вычислены.

## 1.8. Простые виды деформации

Каждый из силовых факторов связан с определенным видом деформации.

В частных случаях система внешних, а значит, и система внутренних сил могут приводиться к одной, двум, трем и так далее до шести составляющих.

*Рассмотрим возможные простейшие случаи деформаций, когда внутренние силы приводятся к какой-либо одной составляющей.*

**Определение 1.14** *Центральным растяжением (сжатием) называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только продольные силы  $N$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $Q$ ,  $M_{изг}$  и  $M_k$ ) равны нулю.*

**Определение 1.15** *Брус, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем.*

**Определение 1.16** *Чистым сдвигом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только поперечные силы  $Q$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $N$ ,  $M_{изг}$  и  $M_k$ ) равны нулю.*

*Чистый сдвиг — вид сопротивления (деформирования), характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.*

**Определение 1.17** *Кручением называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только крутящие моменты  $M_k$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $N$ ,  $Q$ ,  $M_{изг}$ ) равны нулю.*

*Кручение возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно его продольной оси.*

**Определение 1.18** *Брус, работающий на кручение, называется валом.*

*Вал — вращающаяся (обычно в подшипниках) деталь машины, передающая крутящий момент.*

**Определение 1.19** *Чистым изгибом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только изгибающие моменты  $M_{изг}$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $N$ ,  $Q$ ,  $M_k$ ) равны нулю.*

Чистый изгиб — вид сопротивления (деформирования), при котором происходит искривление оси прямого бруса, или изменение кривизны кривого бруса.

**Определение 1.20** *Стержень, работающий на изгиб, называется балкой.*

Изгиб возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно главных центральных осей его поперечного сечения.

### 1.9. Понятие о напряжении. Определение нормальных и касательных напряжений

Выявив внутренние силы и даже определив их равнодействующую, еще нельзя говорить об условии прочности рассматриваемого тела, так как прочность зависит не только от материала и величины равнодействующей внутренних сил, но также от характера их распределения и размеров тела — от величины того сечения, к которому приложена равнодействующая.

Ранее указывалось, что внешние силы характеризуются интенсивностью, численно равной силе, приходящейся на единицу площади. По аналогии, внутренние силы также принято характеризовать интенсивностью, относя усилие, передаваемое через какое-либо воображаемое сечение, к площади этого сечения.

Выделим (рис. 1.11, а) в окрестности произвольной точки бесконечно малую площадку  $\Delta A$ .

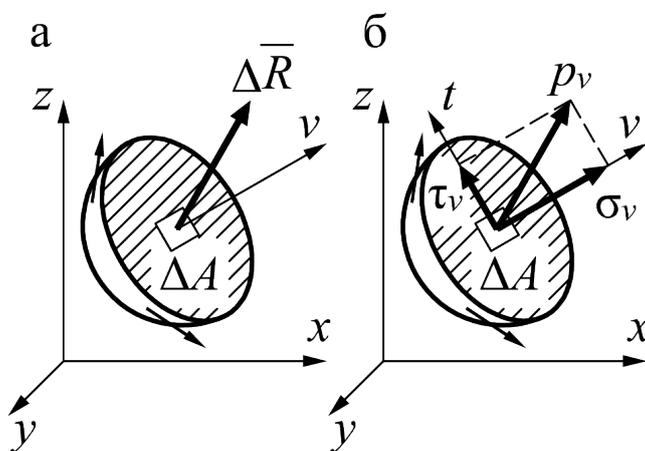


Рис. 1.11. Бесконечно малая площадка  $\Delta A$  в окрестности произвольной точки

На эту площадку действуют внутренние силы с равнодействующей  $\Delta R$ , направление которой, в общем случае, не совпадает с направлением нормали  $\nu$  к площадке. Будем считать, что равнодействующая  $\Delta R$  приложена в центре тяжести площадки  $\Delta A$ . Среднее напряжение будет равно

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta R}{\Delta A}. \quad (1.3)$$

Устремляя величину  $\Delta A$  к нулю и переходя к пределу, получим полное напряжение в рассматриваемой точке

$$p_{\nu} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta R}{\Delta A} \right) = \frac{dR}{dA}. \quad (1.4)$$

Разложив полное напряжение  $p_{\nu}$  на составляющие по нормали к площадке и по касательной к ней, получим нормальное напряжение  $\sigma_{\nu}$  и касательное напряжение  $\tau_{\nu}$  в точке (рис. 1.11, б). Между напряжениями справедливо соотношение

$$p_{\nu}^2 = \sigma_{\nu}^2 + \tau_{\nu}^2. \quad (1.5)$$

Если внутренние силы распределяются равномерно по сечению, то и напряжения распределяются равномерно и во всех точках сечения будут одинаковые. Величина напряжения в этом случае определяется как отношение равнодействующей внутренних сил к суммарной площади, то есть

$$p = \frac{R}{A}. \quad (1.6)$$

**Определение 1.21** *Напряжение — это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади сечения.*

Размерность напряжения —  $\text{кГ/см}^2$  или  $\text{н/м}^2$  (Па).

Совокупность напряжений по всевозможным площадкам, проходящим через точку, образует *напряженное состояние* в точке.

## 1.10. Интегральная связь между напряжениями и внутренними силами

Установим связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами в поперечном сечении бруса.

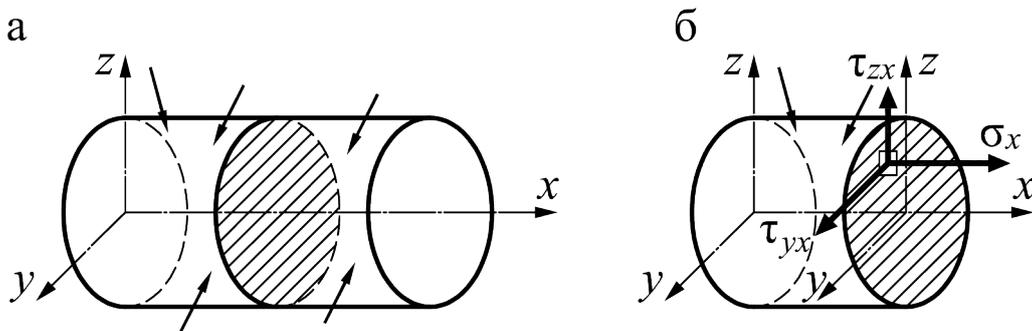


Рис. 1.12. Стержень, находящийся в равновесии под действием произвольных нагрузок

Рассмотрим стержень, находящийся в равновесии под действием произвольных нагрузок (рис. 1.12, а).

Рассечем мысленно стержень плоскостью, перпендикулярной оси.

Разложим полное напряжение  $p_v$  на нормальное напряжение  $\sigma_x = \sigma$  и касательные напряжения  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$  (рис. 1.12, б). Направление нормальной составляющей напряжения вполне определено и здесь достаточно одного индекса для их обозначения (положение нормали). Для обозначения касательного напряжения необходимо два индекса: первый индекс указывает направление вектора касательного напряжения; второй — плоскость, на которой это напряжение действует.

Напряжения в данной точке связаны между собой соотношением

$$p_x^2 = \sigma_x^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2. \quad (1.7)$$

Установим связь между внутренними силовыми факторами и напряжениями в поперечном сечении бруса.

Выделим в окрестности рассматриваемой точки элементарную площадку  $dA$ . Умножая напряжения  $\sigma$ ,  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$  на площадь  $dA$  площадки их действия получим внутренние элементарные усилия

$$dN = \sigma \cdot dA; \quad dQ_y = \tau_{yx} \cdot dA; \quad dQ_z = \tau_{zx} \cdot dA.$$

Суммируя проекции элементарных сил, а также их моменты относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим выражения шести составляющих главного вектора внутренних сил

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA; & Q_y &= \int_A \tau_{yx} dA; & Q_z &= \int_A \tau_{zx} dA; \\ M_y &= - \int_A \sigma \cdot z dA; & M_z &= - \int_A \sigma \cdot y dA; & M_k &= \int_A (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{yx} \cdot z) dA. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Полученные выражения определяют равнодействующие внутренних сил через соответствующие напряжения, если установлены законы их распределения по сечению.

Одной из основных задач сопротивления материалов является определение *напряжений через внутренние усилия*. Решить ее можно только рассматривая дополнительно и условия деформирования тела.

### **1.11. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Введение»**

1. Какие цели и задачи науки о сопротивлении материалов?
2. Что изучает наука о сопротивлении материалов?
3. Что называется деформацией стержня?
4. Что такое упругость тела?
5. Какая деформация называется упругой и пластической?
6. Как классифицируются внешние нагрузки, действующие на сооружения?
7. Что называется брусом, пластинкой и оболочкой?
8. Что такое расчетная схема? Основные направления схематизации реальной конструкции.
9. Какие основные типы опор вы знаете?
10. Какие уравнения статики (равновесия) можно составить для определения опорных реакций?
11. Какие основные допущения приняты в сопротивлении материалов?
12. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса?
13. В чем заключается метод сечения?
14. Какие основные простые виды деформации вызываются внешними силами?
15. Что называется напряжением и какая его размерность?
16. Какие напряжения называются нормальными и касательными?
17. Какая интегральная связь существует между внутренними усилиями и напряжениями?

## Тема 2. Геометрические характеристики плоских сечений

### 2.1. Статические моменты, их свойства. Определение положения центра тяжести сечения

Рассмотрим произвольную фигуру, расположенную в декартовой системе координат  $yOz$  и любую точку  $K(y, z)$ , принадлежащую этой фигуре (рис. 2.1).

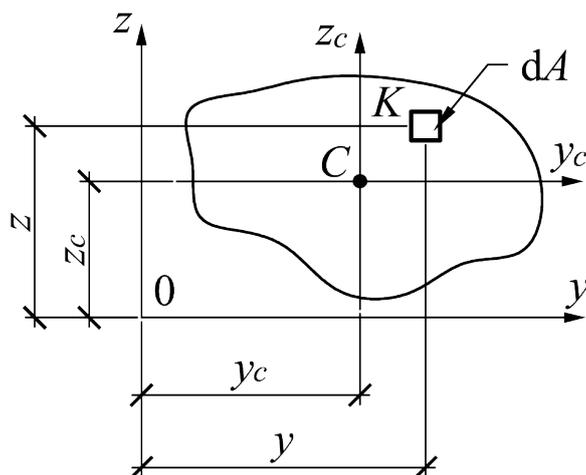


Рис. 2.1

Точку  $K(y, z)$  ограничим элементарной площадью величиной  $dA$ . По аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение момента элементарной площади относительно некоторой оси.

Произведение элементарной площади  $dA$  на координату  $z$  точки  $K(y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке, называется статическим моментом этого элемента площади относительно оси  $y$

$$dS_y = z dA.$$

Аналогично,  $dS_z = y dA$  — статический момент элемента площади  $dA$  относительно оси  $z$ .

**Определение 2.1** *Статическим моментом площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координату точки  $K(y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке, то есть*

$$S_y = \int_A z dA; \quad S_z = \int_A y dA. \quad (2.1)$$

Единицей измерения статического момента является единица длины в третьей степени — см<sup>3</sup> (в системе СИ — м<sup>3</sup>).

*Статический момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.*

Проводя аналогию между моментами сил и моментами площадей, на основании теоремы Вариньона о моменте равнодействующей системы сил из курса теоретической механики, можно записать следующие выражения для моментов площади

$$S_y = A z_C; \quad S_z = A y_C, \quad (2.2)$$

где  $A$  — площадь рассматриваемой фигуры;

$y_C$  и  $z_C$  — координаты ее центра тяжести.

Если провести оси  $y_C$  и  $z_C$  через центр тяжести фигуры — точку  $C$ , то статические моменты относительно этих осей будут равны нулю, то есть

$$S_{y_C} = 0; \quad S_{z_C} = 0, \quad (2.3)$$

**Определение 2.2** *Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными. Относительно этих осей статические моменты равны нулю.*

Таким образом, получаем формулы для определения координат центра тяжести фигуры

$$y_C = \frac{S_z}{A}; \quad z_C = \frac{S_y}{A}. \quad (2.4)$$

При вычислении статических моментов сложной составной фигуры ее разбивают на элементарные или простые части, для каждой из которых площадь и положение ее центра тяжести известны.

В этом случае статические моменты определяются как алгебраические суммы статических моментов каждой элементарной площади

$$S_y = S_y^I + S_y^{II} + S_y^{III} + \dots = A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3} + \dots;$$

$$S_z = S_z^I + S_z^{II} + S_z^{III} + \dots = A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3} + \dots$$

Используя последние соотношения, получаем формулы для определения координат центра тяжести сложной составной фигуры

$$y_C = \frac{A_1 y_{C1} + A_2 y_{C2} + A_3 y_{C3} + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}; \quad z_C = \frac{A_1 z_{C1} + A_2 z_{C2} + A_3 z_{C3} + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}.$$

или

$$y_C = \frac{\sum S_z}{\sum A}; \quad z_C = \frac{\sum S_y}{\sum A}. \quad (2.5)$$

## 2.2. Осевые и центробежный моменты инерции и их свойства

**Определение 2.3** *Осевым или экваториальным моментом инерции площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на квадрат координаты точки  $K(y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке (рис. 2.2)*

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_z = \int_A y^2 dA. \quad (2.6)$$

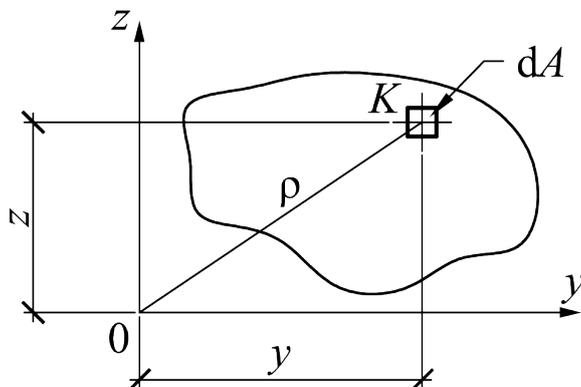


Рис. 2.2

**Определение 2.4** *Полярным моментом инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса 0) называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарных площадок на квадраты их расстояний  $\rho$  от полюса (рис. 2.2)*

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (2.7)$$

**Определение 2.5** *Центробежным моментом инерции площади фигуры называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координаты точки  $K(y,z)$ , принадлежащей элементарной площадке (рис. 2.2)*

$$I_{yz} = \int_A yz \, dA. \quad (2.8)$$

Единицей измерения момента инерции является единица длины в четвертой степени —  $\text{см}^4$ , (в системе СИ —  $\text{м}^4$ ).

*Осевой и полярный моменты инерции всегда положительны по определению.*

*Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.*

### 2.3. Полярный момент инерции и его свойства

В задачах на кручение стержней круглого поперечного сечения фигурирует понятие полярного момента инерции, который определяется по формуле (2.7)

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \, dA.$$

где  $\rho$  — полярный радиус, или расстояние от начала координат до площадки  $dA$ .  
Поскольку (рис. 2.2)

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \rightarrow I_\rho = \int_A (y^2 + z^2) \, dA = \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_z} + \underbrace{\int_A z^2 \, dA}_{I_y} = I_z + I_y.$$

То есть

$$I_\rho = I_y + I_z = \text{const}. \quad (2.9)$$

*Полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции.*

## 2.4. Зависимости между моментами инерции фигуры относительно параллельных осей

Для произвольной фигуры, площадь которой равна  $A$ , известны моменты инерции  $I_{y_C}$ ,  $I_{z_C}$  и  $I_{y_C z_C}$  относительно центральных осей  $y_C$ ,  $z_C$ .

Необходимо определить моменты инерции  $I_{y_1}$ ,  $I_{z_1}$  и  $I_{y_1 z_1}$  относительно новых осей  $y_1$  и  $z_1$ , которые параллельны центральным осям  $y_C$  и  $z_C$  (рис. 2.3).

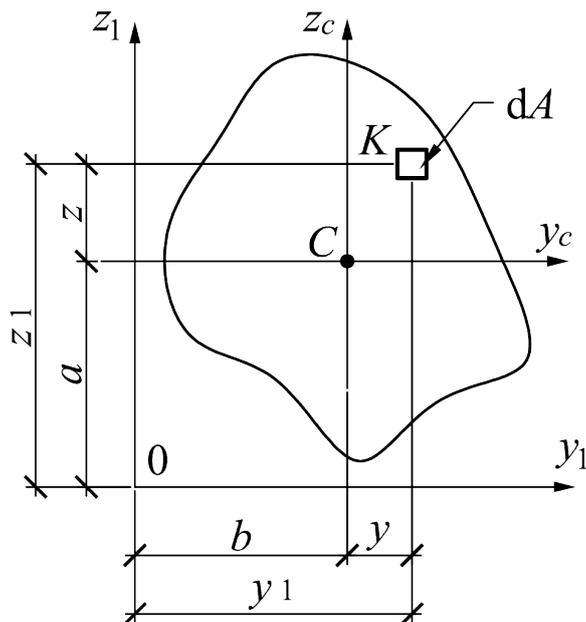


Рис. 2.3

Обозначим через  $b$  и  $a$  координаты точки  $C$  в системе координат  $y_1 0 z_1$  (рис. 2.3).

Из рисунка легко установить зависимости между новыми и старыми координатами элементарной площадки  $dA$

$$y_1 = y + b; \quad z_1 = z + a.$$

Используя определения осевых моментов инерции относительно осей  $y_1$ ,  $z_1$  (2.9), находим

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z + a)^2 dA = \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I_{y_C}} + 2a \underbrace{\int_A z dA}_{S_{y_C}} + a^2 \underbrace{\int_A dA}_A = I_{y_C} + 2a S_{y_C} + a^2 A;$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+b)^2 dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_{z_C}} + 2b \underbrace{\int_A z dA}_{S_{z_C}} + b^2 \underbrace{\int_A dA}_A = I_{z_C} + 2bS_{z_C} + b^2A;$$

$$\begin{aligned} I_{y_1z_1} &= \int_A y_1z_1 dA = \int_A (y+b)(z+a) dA = \\ &= \underbrace{\int_A yz dA}_{I_{y_Cz_C}} + b \underbrace{\int_A z dA}_{S_{y_C}} + a \underbrace{\int_A y dA}_{S_{z_C}} + ab \underbrace{\int_A dA}_A = I_{y_Cz_C} + bS_{y_C} + aS_{z_C} + abA. \end{aligned}$$

Здесь

$$I_{y_Cz_C} = \int_A z^2 dA; \quad I_{z_C} = \int_A y^2 dA; \quad I_{y_Cz_C} = \int_A yz dA; \quad S_{y_C} = \int_A z dA; \quad S_{z_C} = \int_A y dA.$$

Так как оси  $y_C$  и  $z_C$  — центральные оси, то

$$S_{y_C} = S_{z_C} = 0.$$

Окончательно, формулы параллельного переноса осей в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_{y_C} + a^2A; \\ I_{z_1} &= I_{z_C} + b^2A; \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$I_{y_1z_1} = I_{y_Cz_C} + abA.$$

Первые две зависимости формулируются следующим образом: *Момент инерции фигуры относительно любой оси, параллельной центральной, равен моменту инерции фигуры относительно центральной оси, плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь фигуры.*

Третья зависимость читается так: *Центробежный момент инерции фигуры относительно произвольных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции фигуры относительно центральных осей плюс произведение координат центра тяжести фигуры относительно произвольных осей на площадь фигуры.*

Необходимо помнить, что вышеприведенные формулы параллельного переноса осей (2.10) справедливы только в том случае, когда оси  $y_C$  и  $z_C$  — центральные оси.

Следствие. Осевые моменты инерции фигуры относительно центральных осей минимальны по сравнению с осевыми моментами инерции этой фигуры относительно любых других параллельных им осей.

## 2.5. Зависимость между моментами инерции фигуры при повороте осей

Рассмотрим некоторую фигуру, отнесенную к первоначальной декартовой системе координат  $y_0, z_0$  (рис. 2.4).

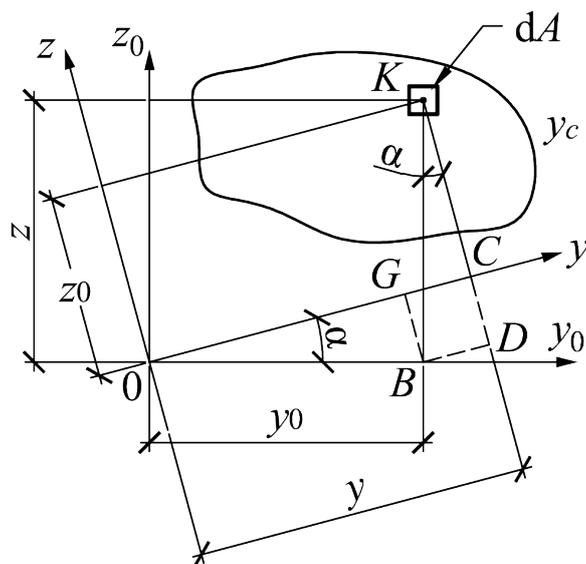


Рис. 2.4

Относительно осей  $y_0$  и  $z_0$  известны моменты инерции  $I_{y_0}, I_{z_0}, I_{y_0z_0}$ .

Необходимо определить осевые и центробежный моменты инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$ , полученных поворотом первоначальных центральных осей  $y_0$  и  $z_0$  против хода часовой стрелки на угол  $\alpha > 0$ , то есть необходимо найти  $I_y, I_z$  и  $I_{yz}$  фигуры, выразив их через  $I_{y_0}, I_{z_0}$  и  $I_{y_0z_0}$ , а также положительный угол  $\alpha$ .

Выразим координаты ( $y$  и  $z$  точки  $K$  (центр тяжести элементарной площадки  $dA$ ) в новой системе координат через координаты  $y_0, z_0$  в исходной системе координат

$$y_0 = OB; \quad z_0 = BK.$$

Из точки  $B$  опустим перпендикуляры на ось  $y$  и на продолжение линии  $KC$ , в результате получим прямоугольник  $BGCD$ .

Из прямоугольного треугольника  $BOG$  находим

$$BG = OB \cdot \sin \alpha = y_0 \sin \alpha = CD; \quad OG = OB \cdot \cos \alpha = y_0 \cos \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника  $BKD$  находим

$$BD = BK \cdot \sin \alpha = z_0 \sin \alpha = GC; \quad KD = KB \cdot \cos \alpha = z_0 \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y &= OC = OG + GC = y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha; \\ z &= KC = KD - CD = z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Из определения осевых моментов инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$  (2.6) следует

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA = \int_A (z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A z_0^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0 z_0 dA + \sin^2 \alpha \int_A y_0^2 dA. \end{aligned}$$

Аналогично получаем,

$$I_z = \cos^2 \alpha \int_A y_0^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0 z_0 dA + \sin^2 \alpha \int_A z_0^2 dA.$$

Но по определению (2.6)

$$I_{y_0} = \int_A z_0^2 dA; \quad I_{z_0} = \int_A y_0^2 dA; \quad I_{y_0 z_0} = \int_A y_0 z_0 dA.$$

Следовательно, окончательно выражения для осевых моментов инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$  принимают вид

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_0} \cos^2 \alpha + I_{z_0} \sin^2 \alpha - I_{y_0 z_0} \sin 2\alpha; \\ I_z &= I_{y_0} \sin^2 \alpha + I_{z_0} \cos^2 \alpha + I_{y_0 z_0} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.11)$$

По определению центробежного момента инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$  (2.8) находим

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_A yz dA = \int_A (y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha) \cdot (z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha) dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y_0 z_0 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0^2 dA + \sin \alpha \cos \alpha \int_A z_0^2 dA - \sin^2 \alpha \int_A y_0 z_0 dA \end{aligned}$$

Следовательно, выражение центробежного момента инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$  принимает вид

$$I_{yz} = \frac{I_{y_0} - I_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha. \quad (2.12)$$

Таким образом, мы получили формулы, выражающие зависимость между моментами инерции фигуры относительно любых повернутых осей

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_0} \cos^2 \alpha + I_{z_0} \sin^2 \alpha - I_{y_0 z_0} \sin 2\alpha; \\ I_z &= I_{y_0} \sin^2 \alpha + I_{z_0} \cos^2 \alpha + I_{y_0 z_0} \sin 2\alpha; \\ I_{yz} &= \frac{I_{y_0} - I_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Правило знаков. Положительный угол  $\alpha$  откладывается от первоначальных осей  $y_0$  и  $z_0$  против хода часовой стрелки.

Эти формулы являются основными для расчетов, связанных с определением моментов инерции относительно любых повернутых осей.

Складывая первое и второе выражения (2.13), получим

$$I_y + I_z = I_{y_0} + I_{z_0} = \text{const}. \quad (2.14)$$

Следовательно, при повороте центральных осей сумма соответствующих осевых моментов инерции не изменяется.

## 2.6. Вычисление моментов инерции простейших фигур

### 2.6.1. Прямоугольник

Вычислим осевые моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей  $y$  и  $z$  (рис. 2.5).

По определению осевого момента инерции (2.6)

$$I_y = \int_A z^2 dA,$$

где  $dA = b \cdot dz$  — площадь элементарного прямоугольника (рис. 2.5).

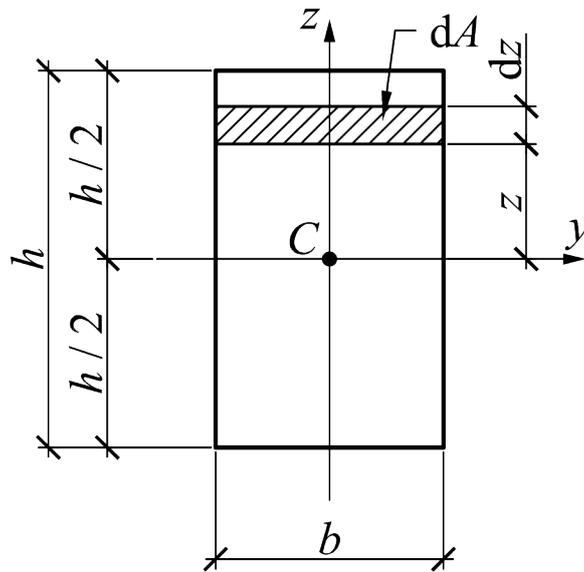


Рис. 2.5

Подставляя под знак интеграла вместо  $dA$  ее значение, получим

$$I_y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{b}{3} h^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

Следовательно,

$$I_y = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.15)$$

Аналогично можно вывести формулу осевого момента инерции прямоугольника относительно оси  $z$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}. \quad (2.16)$$

### 2.6.2. Треугольник

Вычислим осевые моменты инерции треугольника относительно центральных осей  $y_C$  и  $z_C$  (рис. 2.6).

Рассматривая в качестве элементарной площадки  $dA$  прямоугольник с основанием  $b(z) = KL$  и высотой  $dz$ , получаем

$$dA = dz.$$

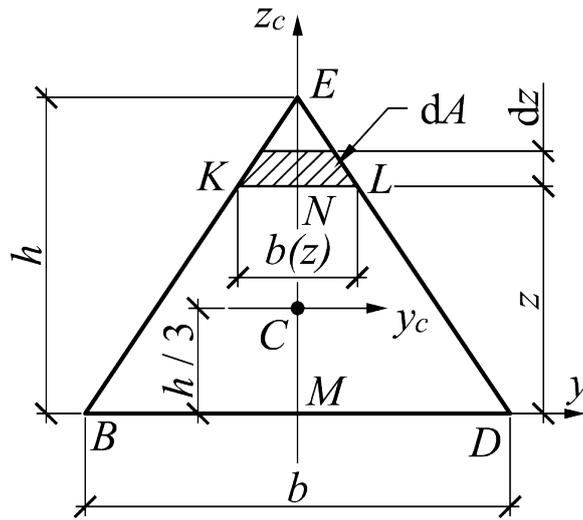


Рис. 2.6

Размер основания находим из подобия треугольников  $BED$  и  $KEL$

$$\frac{KL}{BD} = \frac{EN}{EM}, \quad \frac{b(z)}{b} = \frac{h-z}{z} b(z) = (h-z) \cdot \frac{b}{h},$$

где  $z$  — расстояние от оси  $y$  до элементарной площадки.

$$dA = b(z) dz = \frac{b}{h} (h-z).$$

По определению момента инерции относительно оси  $y$  (2.6), получаем

$$I_y = \int_A z^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 \cdot (h-z) dz = \frac{b}{h} \cdot \left( h \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{b}{h} \left( \frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

То есть,

$$I_y = \frac{bh^3}{12}.$$

Используя формулу моментов инерции при параллельном переносе осей (2.10), получим

$$I_y = I_{yc} + \left( \frac{h}{3} \right)^2 \cdot A.$$

Из этого равенства определяем момент инерции треугольника относительно центральной оси  $yc$

$$I_{yc} = I_y - \left( \frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} bh = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}.$$

Следовательно,

$$I_{yc} = \frac{bh^3}{36}. \quad (2.17)$$

Аналогично можно вывести формулу осевого момента инерции треугольника относительно оси центральной  $z_C$

$$I_{z_C} = \frac{hb^3}{36}. \quad (2.18)$$

### 2.6.3. Круг

Вычислим полярный момент инерции круга относительно центра тяжести. В качестве элементарной площади рассмотрим площадь заштрихованного кольца с радиусами  $\rho$  и  $\rho + d\rho$  (рис. 2.7).

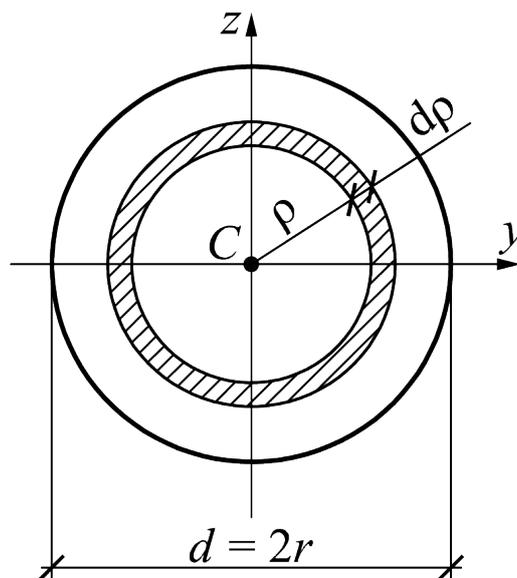


Рис. 2.7

Площадь этого кольца

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

Тогда

$$I_\rho = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \rho^2 = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho. \quad (2.19)$$

После интегрирования и подстановки пределов полярный момент инерции круга относительно его центра тяжести  $C$  найдем по формуле

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0.1 d^4. \quad (2.20)$$

Для определения осевых моментов инерции круга относительно центральных осей  $y$  и  $z$  прежде всего отметим, что очевидно,

$$I_y = I_z,$$

а затем воспользуемся формулой (2.9), на основании которой

$$I_y = I_z = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0.05 d^4. \quad (2.21)$$

#### 2.6.4. Кольцо

Для определения полярного момента инерции кругового кольца с наружным диаметром  $D$  и внутренним диаметром  $d$  (рис. 2.8) воспользуемся формулой (2.19), но интегрирование выполним в пределах от  $\frac{d}{2}$  до  $\frac{D}{2}$ , то есть

$$I_{\rho} = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho.$$

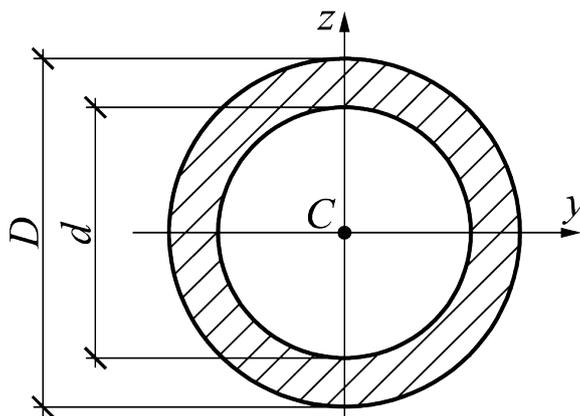


Рис. 2.8

В результате получим

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (2.22)$$

где

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Следовательно, полярный момент инерции кругового кольца равен разности полярных моментов инерции внешнего и внутреннего круга.

Осевые моменты инерции кругового кольца по аналогии будут равны

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4). \quad (2.23)$$

## 2.7. Главные оси и главные моменты инерции. Определение положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений

**Определение 2.6** *Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (относительно одной — максимум, относительно другой — минимум), называются главными осями.*

**Определение 2.7** *Главные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются главными центральными осями.*

*Если, хотя бы одна, из взаимно перпендикулярных осей декартовой системы координат является осью симметрии фигуры, то центробежный момент инерции такой фигуры равен нулю.*

В самом деле, для симметричной фигуры всегда можно выделить две элементарные площадки с одинаковой площадью  $dA$ , которые имеют одинаковые ординаты  $z$  и равные, но противоположные по знаку абсциссы  $y$  (рис. 2.9).

Составляя сумму произведений  $yzdA$  для элементов, показанных на рис. 2.9, то есть, вычисляя интеграл (2.8), получаем в результате

$$I_{yz} = 0.$$

**Вывод.** *Ось симметрии фигуры всегда является главной центральной осью.*

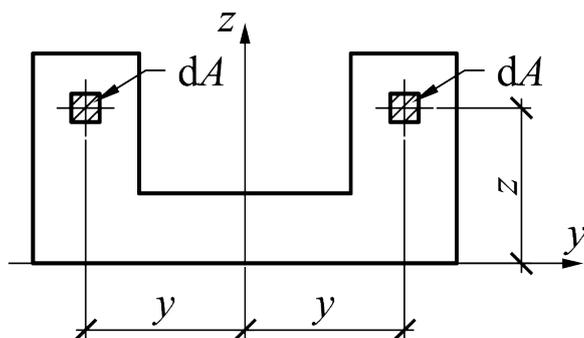


Рис. 2.9

Следовательно, для симметричных фигур положение главных центральных осей определяется достаточно просто.

*Для фигуры, имеющей одну ось симметрии, одна из главных центральных осей совпадает с этой осью симметрии, а вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести перпендикулярно к ней.*

*Для фигуры, имеющей две оси симметрии, главные центральные оси совпадают с этими осями симметрии.*

Можно сказать, что, если для какой — либо фигуры два главных осевых момента равны между собой, тогда любая центральная ось является главной (круг, квадрат, правильный треугольник, правильный шестиугольник и т. д.).

Анализируя формулы повернутых осей (2.13), приходим к заключению о том, что при изменении угла поворота  $\alpha$  осевые моменты инерции изменяются так, что их сумма остается неизменной (2.14). Это приводит к выводу о том, что можно найти такое значение угла  $\alpha_0$ , при котором один из осевых моментов инерции достигнет минимального значения, а второй — максимального, то есть возникает постановка задачи на нахождение экстремума функции по переменной  $\alpha$ .

Вычисляя производную от  $I_y$  или  $I_z$  по переменной  $\alpha$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dI_y}{d\alpha} &= 2I_{y_0} \cos \alpha (-\sin \alpha) + 2I_{z_0} \sin \alpha \cos \alpha - 2I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left( \frac{I_{y_0} - I_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что (2.12)

$$I_{yz} = \frac{I_{y_0} - I_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha$$

выражение для производной принимает вид

$$\frac{dJ_y}{d\alpha} = -2 \left( \frac{I_{y_0} - I_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha \right) = -2I_{yz}.$$

Приравнивая производную нулю, получаем уравнение, позволяющее найти угол  $\alpha_0$

$$\frac{I_{y_0} - I_{z_0}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{y_0 z_0}}{I_{y_0} - I_{z_0}} \quad \text{и} \quad I_{yz}|_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (2.24)$$

Таким образом, эта формула (2.24) определяет положение экстремальных осей, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, то есть положение главных осей.

Определение. Осевые моменты относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Для определения численных значений главных моментов инерции можно использовать формулы повернутых осей (2.11), подставляя в них значение угла  $\alpha_0$ .

Выполняя эту операцию в общем виде, после некоторых алгебраических преобразований тригонометрических выражений, можно получить формулы для определения главных моментов инерции, не содержащие угла  $\alpha_0$

$$I_{\max/\min} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}. \quad (2.25)$$

*Следовательно, для определения положения главных центральных осей и численных значений главных центральных моментов инерции несимметричных поперечных сечений рекомендуется следующий общий порядок действий:*

1. Проводят произвольные оси. Вычисляют статические моменты инерции относительно этих осей (разбив предварительно сложное поперечное сечение на ряд простых фигур) и находят положение центра тяжести сложного сечения.

2. Проводят через центр тяжести всего сечения оси, параллельные первоначально выбранным произвольным осям, и находят с помощью формул параллельного переноса осей центробежный и осевые моменты инерции сечения относительно этих новых центральных осей.

3. Находят положение главных центральных осей  $u$  и  $v$  по формуле (2.24).
4. Находят численные значения главных центральных моментов инерции по формулам (2.11) или (2.25).
5. Для проверки правильности вычисления  $I_u$  и  $I_v$  используют равенства

$$I_{uv} = 0 \quad \text{и} \quad I_u + I_v = I_y + I_z. \quad (2.26)$$

*Примечание.* Следует иметь в виду, что с помощью этих равенств можно проверить только правильность вычисления положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции. Соблюдение этих равенств не гарантирует правильности вычисления положения центра тяжести сечения, а также осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно центральных осей.

## 2.8. Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга

Иногда при расчетах бывает математически удобно представить момент инерции как произведение площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции

$$I_y = A \cdot i_y^2, \quad (2.27)$$

где  $i_y^2$  — радиус инерции относительно оси  $y$ .

Откуда следует, что

$$i_y = \pm \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad i_z = \pm \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \quad (2.28)$$

Радиус инерции круга будет равен

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi d^4}{64 \cdot \pi d^2}} = \pm \frac{d}{4}. \quad (2.29)$$

Радиусы инерции измеряются единицами длины в первой степени — см, (в системе СИ — м).

## 2.9. Моменты сопротивления и их свойства

**Определение 2.8** Моментом сопротивления плоской фигуры относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости фигуры, называется отношение осевого момента инерции относительно той же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|}; \quad W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|}. \quad (2.30)$$

Здесь  $W_y$  и  $W_z$  — соответственно моменты сопротивления фигуры относительно осей  $y$  и  $z$ ;

$|z_{\max}|$  и  $|y_{\max}|$  — расстояния от осей до наиболее удаленных точек фигуры.

**Определение 2.9** Полярным моментом сопротивления плоской фигуры относительно какого-либо центра (полюса), лежащего в плоскости фигуры, называется отношение полярного момента инерции плоской фигуры относительно того же центра к расстоянию от центра до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{|\rho_{\max}|}, \quad (2.31)$$

где  $W_\rho$  — полярный момент сопротивления фигуры относительно центра  $O$ ;

$I_\rho$  — полярный момент инерции фигуры;

$|\rho_{\max}|$  — расстояние от центра до наиболее удаленной точки фигуры.

Моменты сопротивления измеряются единицами длины в третьей степени —  $\text{см}^3$ , (в системе СИ —  $\text{м}^3$ ).

Сложные сечения, встречающиеся в различных конструкциях, часто включают элементы стандартных прокатных профилей стали (двутавры, швеллера, уголки и др.).

Расчет геометрических характеристик таких сечений сложен и трудоемок, поэтому в справочных таблицах для этих профилей (в сортаментах) приводятся не только их геометрические размеры, но и такие важные сведения, как положение центра тяжести, моменты инерции, моменты сопротивления и др.

Эти табличные данные намного облегчают вычисление геометрических характеристик сложных составных сечений.

## **2.10. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Геометрические характеристики плоских фигур»**

1. Какие оси называются центральными?
2. Что называется статическим моментом площади фигуры относительно некоторой оси?
3. Как определяется статический момент фигуры относительно некоторой оси, координаты центра тяжести которой известны?
4. Как вычисляется положение центра тяжести сложных фигур (для симметричных и несимметричных сечений)?
5. Дайте определение осевого и центробежного моментов инерции фигуры.
6. Приведите формулы моментов инерции простейших фигур относительно собственных главных центральных осей (прямоугольник, треугольник, круг).
7. Дайте определение полярного момента инерции.
8. Приведите формулы полярного момента инерции круга и кольца.
9. Как изменяются моменты инерции при параллельном переносе осей, если исходные оси — центральные?
10. Формулы для моментов инерции при повороте осей.
11. Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
12. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
13. Как определяется положение главных центральных осей инерции для симметричных сечений?
14. Формула для определения положения главных осей инерции для несимметричных сечений?
15. Определение численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений.
16. Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга и кольца.

## 17. Моменты сопротивления и их свойства.

## Тема 3. Центральное (осевое) растяжение или сжатие прямого бруса

### 3.1. Центральное (осевое) растяжение или сжатие. Продольные силы и их определение

Рассмотрим растяжение бруса внешними силами  $F$ , приложенными к его концам. Очевидно, если воспользоваться методом сечений, во всех сечениях возникает продольная сила  $N$ , равная внешней нагрузке  $F$ . При растяжении продольная сила  $N$  направлена от сечения, а при сжатии — к сечению (рис. 3.1).

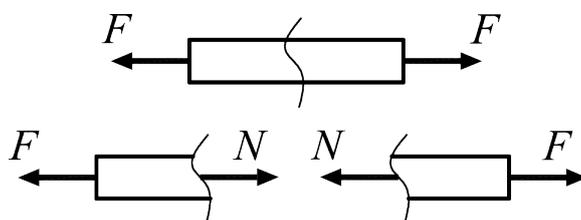


Рис. 3.1

**Определение 3.1** Центральным растяжением (сжатием) называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только продольные силы  $N$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $Q$ ,  $M_{изг}$  и  $M_k$ ) равны нулю.

Как показывают эксперименты, при центральном растяжении или сжатии прямого бруса все его волокна, расположенные вдоль геометрической оси, получают одинаковое удлинение или укорочение.

**Определение 3.2** Брус, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем.

**Определение 3.3** Сечения бруса, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

В общем случае, когда стержень подвергается действию системы внешних сил, приложенных не только к его торцам, но и в промежуточных сечениях, значение продольной силы  $N$  может быть разным по величине и знаку для различных поперечных сечений.

**Определение 3.4** Продольная сила  $N$  в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на геометрическую ось стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения

$$N = \left( \sum F_{kx} \right)_{\text{отсеч}}. \quad (3.1)$$

Правило знаков. Если продольная сила  $N$  вызывает растяжение (удлинение) стержня относительно проведенного сечения, то она считается **положительной**, а если она вызывает сжатие (укорочение) — **отрицательной**.

### 3.2. Эпюры продольных сил. Правила их построения

Для исследования напряженного состояния бруса (стержня) необходимо знать, как изменяются продольные силы  $N$  по его длине. Результат исследования закона распределения продольных сил по длине бруса можно представить в виде графика, называемого эпюрой продольных сил.

**Определение 3.5** График, изображающий закон изменения  $N$  вдоль геометрической оси стержня, называется эпюрой продольных сил.

Ординаты этой эпюры представляют собой численные значения продольных сил  $N$  в соответствующих сечениях стержня.

На рис. 3.2 изображен стержень постоянного поперечного сечения, жестко защемленный в сечении  $A$  и нагруженный внешними силами  $F_1 = 3F$  и  $F_2 = 2F$ , направленными вдоль его геометрической оси.

Определим продольные силы, возникающие в его поперечных сечениях, и построим эпюру продольных сил.

Конец стержня защемлен. Очевидно, что опорная реакция  $R_A$  будет направлена вдоль оси бруса.

1. Составляем уравнение равновесия бруса в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$ .

Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_2 + F_1 - R_A = 0 \rightarrow R_A = F_1 - F_2 = 3F - 2F = +F.$$

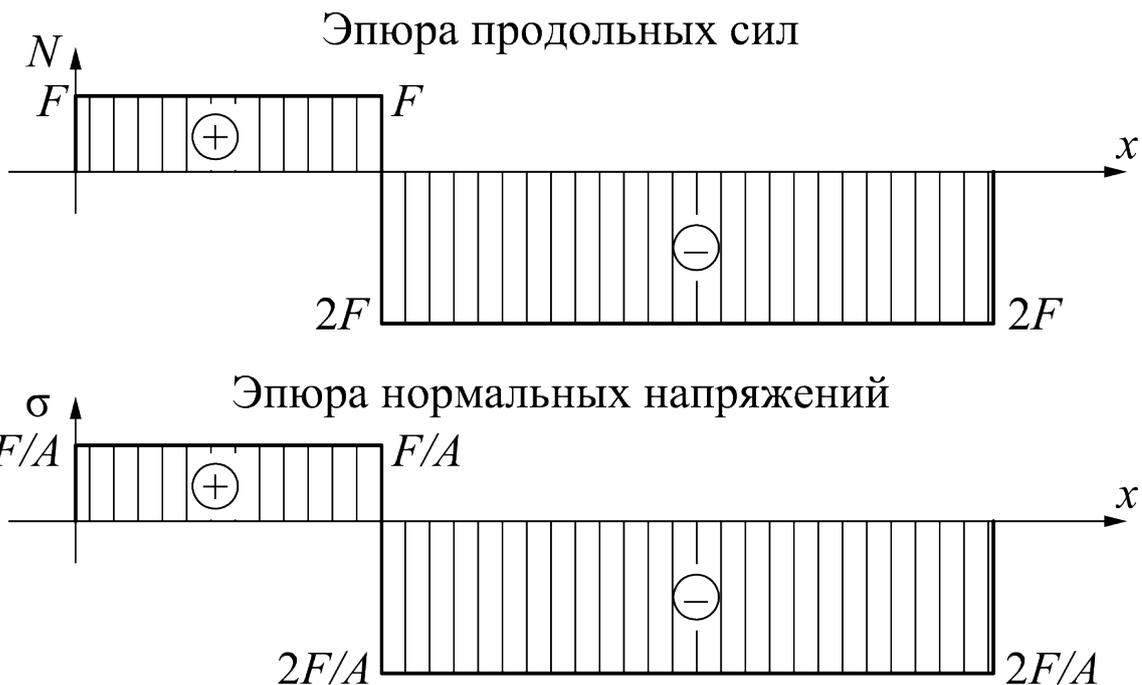
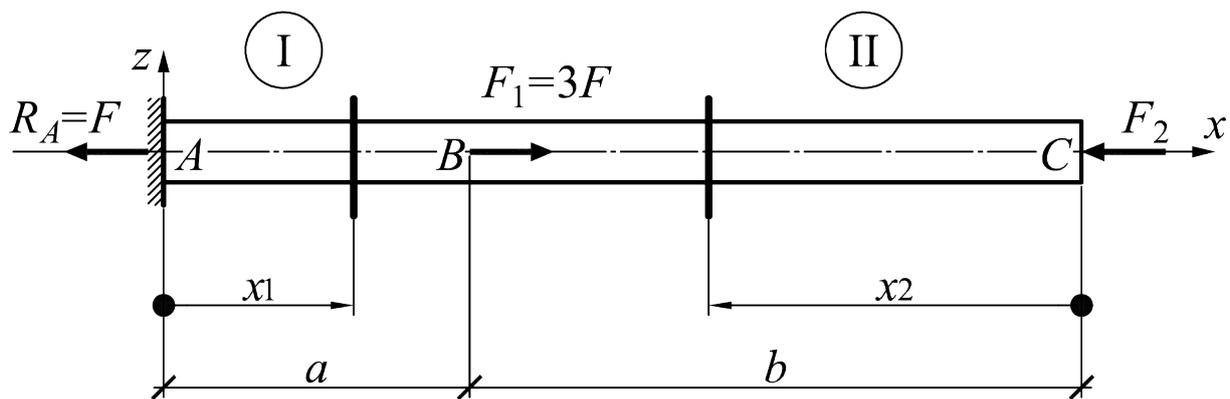


Рис. 3.2

Следовательно,

$$R = +F.$$

Ниже будет показано, что для консольных стержней (брусев), в виде исключения, опорную реакцию можно не определять, а вести дальнейший расчет со стороны свободного конца стержня.

Численные значения опорной реакции, в случае необходимости, можно определить по эпюре  $N$ , используя правило «скачков».

2. Разбиваем стержень на участки.

**Определение 3.6** Участком называется часть стержня, в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия (продольной силы) постоянен.

Границами участка являются:

- а) сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы;
- б) сечения, где начинают или заканчивают свое действие внешние распределенные нагрузки;
- в) сечения, где изменяются размеры или форма поперечного сечения;
- г) сечения, где изменяется материал стержня.

Таким образом, наш стержень имеет два участка ( $AB$  и  $BC$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 3.2).

Границами участков, в данном примере, являются сечения, в которых приложены внешние силы.

3. Строим эпюру  $N$  по участкам стержня.

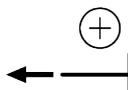
Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает стержень на две части.

Выбираем ту часть стержня, на которую действует наименьшее число известных нагрузок.

Для определения внутреннего усилия в сечении совершенно безразлично, какую часть стержня рассматривать.

**I участок  $AB$ :**  $0 \leq x_1 \leq a$  (начало отсчета на левом конце стержня).

Определяем величину продольной силы  $N$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на геометрическую ось  $x$  бруса. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для продольной силы 

$$N(x_1) = +R_A = +F.$$

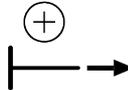
Продольная сила  $N$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = +F \text{ (значение на левой границе участка);}$$

$$N(a) = +F \text{ (значение на правой границе участка).}$$

**II участок C:**  $0 \leq x \leq b$  (начало отсчета на правом конце стержня).

Определяем величину продольной силы  $N$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на геометрическую ось  $x$  бруса. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для продольной силы 

$$N(x_2) = -F_2 = -2F.$$

Продольная сила  $N$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = -2F \text{ (значение на правой границе участка);}$$

$$N(b) = -2F \text{ (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям продольных сил  $N$  в характерных сечениях стержня строим эпюру (график) этого внутреннего усилия, как показано на рис. 3.2.

Эпюра внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси стержня.

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

4. Делаем проверки правильности построенной эпюры внутреннего силового фактора  $N$ .

«Скачки» на эпюре  $N$  возможны только в тех сечениях стержня, где приложены сосредоточенные внешние силы. По величине этот «скачок» равен этой силе.

Таким образом, при построении эпюры  $N$  рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).
2. Разбиваем расчетную схему стержня на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает стержень на две части.

4. Составляем выражение (уравнение), показывающее закон изменения продольной силы  $N$  в пределах рассматриваемого участка. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

5. По этим выражениям вычисляем численные значения продольных сил в характерных сечениях участка (на его границах).

6. По полученным численным значениям продольных сил  $N$  строим эпюру (график) этого внутреннего усилия.

7. Делаем проверки правильности построенной эпюры внутреннего силового фактора  $N$ .

8. Отмечаем опасное сечение стержня, где действует максимальное (наибольшее) по абсолютной величине значение продольной силы  $N$ .

### 3.3. Определение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса

При центральном растяжении или сжатии прямого стержня продольные волокна, расположенные на его поверхности вдоль геометрической оси, получают одинаковое удлинение или укорочение.

Естественно можно предположить, что и внутри стержня все продольные волокна испытывают такое же удлинение, а, следовательно, можно считать, что выполняется гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли), то есть поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его геометрической оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации.

Поскольку в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении (сжатии) возникает только продольная сила, естественно предположить, что касательные составляющие напряжения будут отсутствовать, а полное напряжение в сечении будет равно нормальному напряжению.

Продольная сила  $N$ , возникающая в поперечных сечениях стержня, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения  $A$ , и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями интегральной зависимостью (1.7)

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (3.2)$$

где  $\sigma$  — нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке  $dA$ ;  
 $A$  — площадь поперечного сечения бруса..

Произведение  $\sigma dA$  представляет собой элементарную внутреннюю силу  $\Delta N$ , приходящуюся на площадку  $dA$  (рис. 3.3).

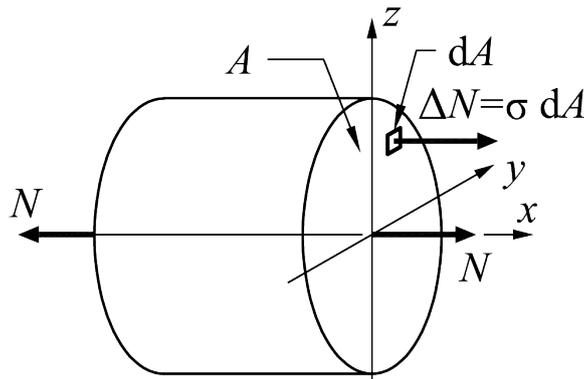


Рис. 3.3

Представим мысленно стержень, состоящий из бесчисленного множества волокон, параллельных его оси.

В результате деформации стержня, в соответствии с гипотезой плоских сечений, два его любые поперечные сечения удаляются друг от друга на некоторую величину, на такую же величину удлиняется каждое волокно. А так как одинаковым удлинениям соответствуют одинаковые напряжения, то и напряжения в поперечных сечениях всех волокон, следовательно, и во всех точках поперечного сечения стержня, будут равны между собой, то есть  $\sigma = \text{const}$ .

Это позволяет в выражении (3.2) вынести величину  $\sigma$  за знак интеграла

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \cdot \int_A dA = \sigma \cdot A. \quad (3.3)$$

Таким образом, нормальное напряжение в поперечном сечении стержня при его центральном растяжении (сжатии) определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (3.4)$$

Знак напряжения зависит от знака продольной силы в рассматриваемом сечении стержня.

Правило знаков. В случае растяжения нормальные напряжения считаются положительными.

Как показывает опыт, нормальные напряжения распределены по всему сечению равномерно, если вблизи этого сечения нет точек приложения внешних сил или каких-то геометрических особенностей.

*Это предположение соответствует принципу Сен-Венана.*

Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня по его длине строится *эюра нормальных напряжений*. Осью (базисной прямой) этой эюры является отрезок прямой, равный длине стержня и параллельный его оси.

Для стержня постоянного поперечного сечения эюра  $\sigma$  имеет такой же вид, как и эюра  $N$ , она отличается от неё лишь принятым масштабом (рис. 3.2).

Для стержня переменного поперечного сечения вид этих двух эюр различен. В частности, для ступенчатого стержня эюра  $\sigma$  имеет «скачки» не только в сечениях, где приложены сосредоточенные осевые силы (здесь имеет «скачки» эюра  $N$ ), но и в местах изменения размеров поперечных сечений.

Для стержня, растягиваемого только двумя силами, приложенными по его концам, напряжения постоянны не только по данному сечению, но и вдоль всего стержня. Такое напряженное состояние называют *одноосным* (однородным).

Если в окрестности любой точки стержня вырезать малый элементарный параллелепипед, одна из граней которого совпадает с поперечным сечением, то площадки этого параллелепипеда будут являться *главными площадками*, а напряжения на них — *главными напряжениями*, причем два из них будут иметь нулевую величину (рис. 3.4)

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0. \quad (3.5)$$

В ряде задач продольная сила не является постоянной по длине стержня, например, в случае растяжения стержня под действием собственного веса.

Напряженное состояние в таких стержнях не является однородным.

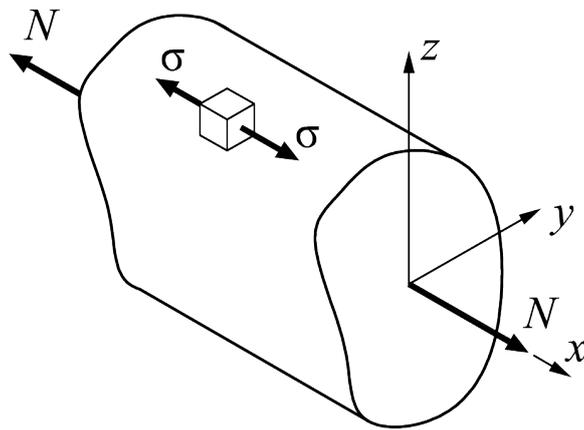


Рис. 3.4

В ступенчатых стержнях напряженное состояние однородно только в пределах отдельных участков, границами которых являются сечения, в которых приложены внешние силы или изменяются поперечные размеры.

### 3.4. Продольные деформации

Вычисление деформаций и перемещений стержня необходимо для его расчета на жесткость.

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения длиной  $l$ , заделанный одним концом и растягиваемый внешней продольной силой  $F$  на другом конце (рис. 3.5).

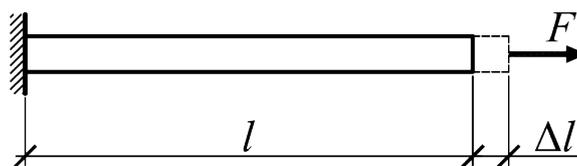


Рис. 3.5

Под действием силы  $F$  стержень удлиняется на некоторую величину  $\Delta l$  и его длина станет равной  $l + \Delta l$ .

Величина  $\Delta l$  называется *полным или абсолютным удлинением (абсолютной продольной деформацией) стержня*.

Абсолютное удлинение, очевидно, зависит от первоначальной длины стержня. Поэтому более удобной мерой деформации стержня является абсолютное удлинение, отнесенное к его первоначальной длине

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.6)$$

**Определение 3.7** *Отношение абсолютного удлинения стержня к его первоначальной длине называется относительной продольной деформацией или относительным удлинением  $\varepsilon$ .*

Считается напряженное состояние в стержне одноосным (однородным), поэтому деформация  $\varepsilon$  вдоль оси стержня остается одной и той же, равной своему среднему значению по длине  $l$ .

Относительное удлинение  $\varepsilon$  не имеет размерности, это отвлеченное число и часто выражается в процентах от первоначальной длины

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%. \quad (3.7)$$

Деформацию удлинения считают положительной, а деформацию сжатия — отрицательной.

### 3.5. Закон Гука при центральном растяжении или сжатии

Нагрузки и деформации, возникающие в стержне, тесно связаны между собой. Чем больше величина внешней силы, растягивающей стержень, тем больше, при прочих равных условиях, его удлинение. Чем больше площадь поперечного сечения бруса, тем удлинение меньше. Опытным путём установлена прямая пропорциональная зависимость между величиной растягивающей силы и соответствующей ей упругой деформацией.

Эту зависимость впервые сформулировал английский ученый Роберт Гук.

**Определение 3.8** *При центральном растяжении (сжатии) нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению (закон Гука)*

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.8)$$

где  $E$  — коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости первого рода или модулем Юнга.

Модуль упругости первого рода или модуль Юнга определяется экспериментально, на основе опытов на растяжение специальных образцов из различных материалов: для стали  $E = 200$  ГПа; для дюралюминия  $E = 72$  ГПа; для меди  $E = 120$  ГПа и т. д.

Закон Гука соблюдается в случае так называемых малых деформаций. Для конечных деформаций связь с напряжениями перестает быть линейной.

При решении многих задач закону Гука удобнее придать несколько иной вид, получаемый подстановкой в (3.8) формул (3.4) и (3.6)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (3.9)$$

По этой формуле можно вычислять величину абсолютного удлинения стержня в пределах рассматриваемого участка.

Если напряженное состояние по длине стержня не является однородным, то общее удлинение может быть найдено как интегральная сумма удлинений по бесконечно малым участкам длиной  $dx$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dx. \quad (3.10)$$

Последней формулой пользуются в тех случаях, когда какие-либо из величин  $N$ ,  $E$ ,  $A$  непостоянны по длине стержня.

**Определение 3.9** Произведение  $E \cdot A$  (модуля Юнга на площадь поперечного сечения) называют жесткостью стержня при растяжении.

Чем больше жесткость, тем менее податливым является стержень.

### 3.6. Поперечные деформации

Опытом установлено, что даже при весьма малых деформациях стержня в продольном направлении его поперечные размеры изменяются. При растяжении тело удлиняется и становится тоньше, а при сжатии укорачивается и становится толще. Это изменение называется поперечной деформацией стержня.

Если обозначить поперечный размер стержня до деформации  $b$  и тот же размер после деформации  $b_1$  (рис. 3.6) то абсолютная поперечная деформация при растяжении стержня будет равна

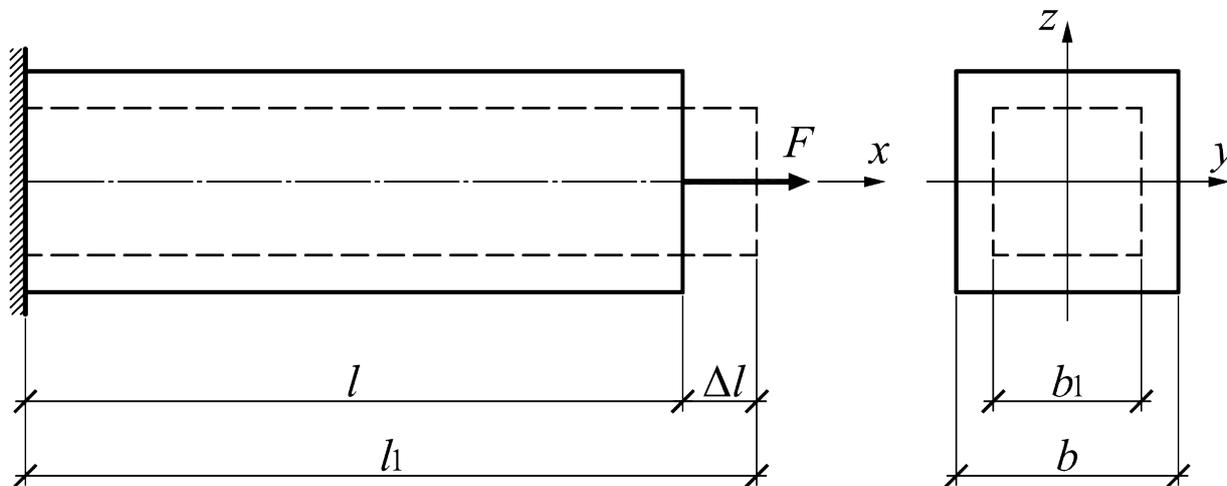


Рис. 3.6

$$\Delta b = b - b_1, \quad (3.11)$$

а его относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{b - b_1}{b} = \frac{\Delta b}{b}$$

или

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b} \cdot 100\%. \quad (3.12)$$

Опыты показывают, что в пределах применимости закона Гука отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации для данного материала есть величина постоянная и равная

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right|. \quad (3.13)$$

Постоянная величина  $\mu$ , зависящая от свойств материала, называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона*.

Для различных материалов  $0 \leq \mu \leq 0.5$ . Например

Табл. 3.1. Значения коэффициента поперечной деформации или коэффициентом Пуассона  $\mu$  для различных материалов

Материал	$\mu$
Пробка	$\approx 0$
Бетон	0.17 – 0.22
Сталь	0.3
Резина	$\rightarrow 0.5$

### 3.7. Основные характеристики механических свойств материалов и их опытное изучение

Механические характеристики определяются путем испытания стандартных образцов. Образцы испытываются на растяжение, сжатие, изгиб, кручение, срез. Основным видом испытаний стали является растяжение стандартных круглых или плоских образцов, для которых строятся диаграммы растяжения в координатах сила — абсолютное удлинение  $F = f(\Delta l)$ .

Для определения обобщенных механических характеристик материала строят диаграммы напряжения в координатах напряжение–деформация  $\sigma = f(\varepsilon)$ .

Рассмотрим диаграмму напряжения малоуглеродистой стали Ст.3, обладающей высокими пластическими свойствами и широко применяемой в строительстве (рис. 3.7).

На отрезке  $OA$  зависимость между напряжениями и деформациями является линейной.

**Определение 3.10** *Напряжение  $\sigma_{пл}$ , соответствующее точке  $A$  на диаграмме напряжения, называется пределом пропорциональности.*

На отрезке  $AB$  линейная зависимость нарушается, но при разгрузке образца возникшие деформации исчезают.

**Определение 3.11** *Напряжение  $\sigma_{уп}$ , соответствующее точке  $B$  на диаграмме напряжения, называется пределом упругости.*

Практически горизонтальный отрезок  $CD$  называется площадкой текучести.

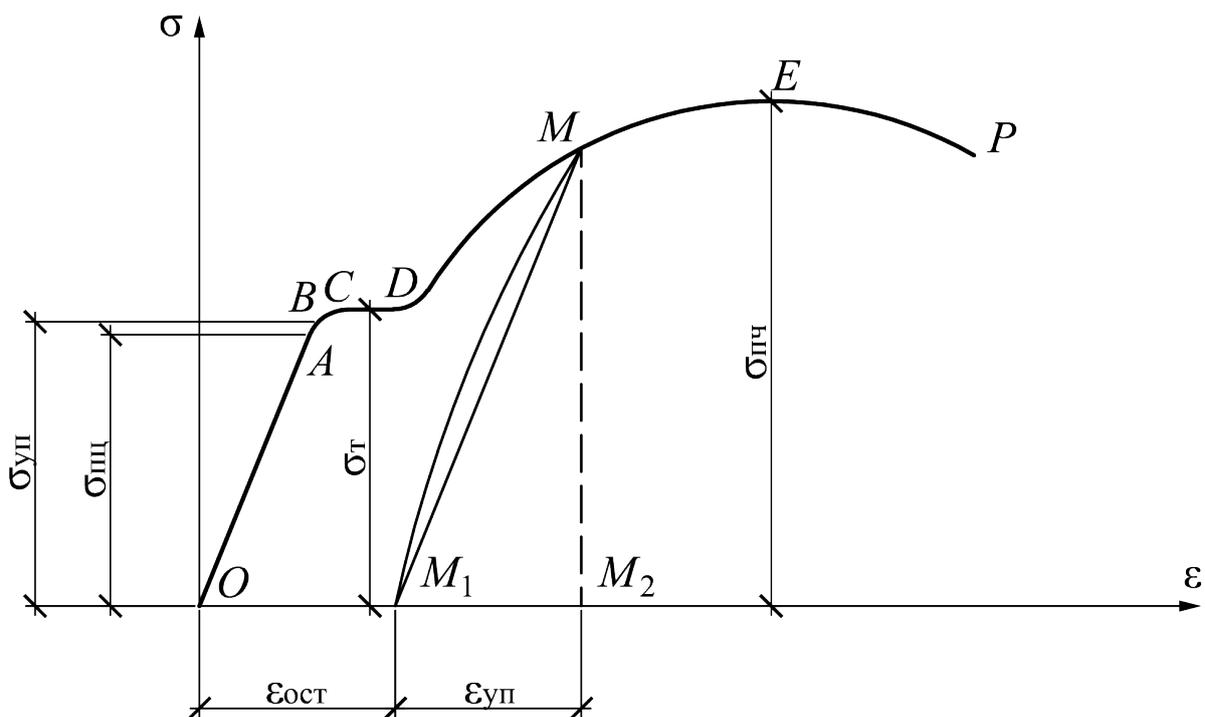


Рис. 3.7

**Определение 3.12** Напряжение  $\sigma_m$ , соответствующее точке  $D$  на диаграмме напряжения, называется пределом текучести.

При напряжениях, равных пределу текучести, в малоуглеродистых сталях развиваются пластические деформации, связанные с необратимыми деформациями сдвига между кристаллами феррита.

После развития определенных пластических деформаций и перестройки кристаллической решетки стали несущая способность стержня увеличивается - рост деформаций сопровождается увеличением напряжений, происходит упрочнение стали. Участок  $DE$  на диаграмме напряжения называется зоной упрочнения. При напряжениях, соответствующих наивысшей точке  $E$  на диаграмме напряжения, в определенном участке образца появляется значительное уменьшение размеров поперечного сечения — образуется, так называемая, *шейка*.

**Определение 3.13** Напряжение  $\sigma_{пч} = \sigma_b$ , соответствующее точке  $E$  диаграммы напряжения, называется пределом прочности или временным сопротивлением.

Разрушение образца наступает вскоре после образования шейки.

Рассмотренная диаграмма напряжения называется *условной*, так как при ее построении не учитывается уменьшение площади поперечного сечения при растяжении образца.

Рассмотренные выше напряжения — предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести и предел прочности (временное сопротивление) являются основными механическими характеристиками прочности и упругости материала.

Если довести нагружение образца до точки, лежащей выше предела упругости (точка  $M$ ), а затем снять нагрузку, то диаграмма разгрузки пойдет по прямой  $MM_1$ , параллельной  $OA$ , а отрезок  $OM_1$  будет соответствовать остаточной деформации  $\varepsilon_{ост}$ . Отрезок  $M_1M_2$  характеризует упругую деформацию  $\varepsilon_{уп}$  при нагружении образца до точки  $M$ . При повторном нагружении образца от точки  $M_1$  диаграмма нагружения следует по кривой, практически совпадающей с прямой  $MM_1$ . Таким образом, при повторном нагружении как бы повышается предел пропорциональности стали, что связано с изменением микроструктуры в ее кристаллической решетке. При этом площадка текучести исчезает, материал становится более хрупким.

Изменения свойств стали, возникающие при разгрузке и повторном нагружении, называются *наклепом*.

Участок диаграммы  $MM_1M$  называется *петлей гистерезиса*.

Использование реальных диаграмм приводит к большим математическим трудностям. Существуют различные способы аппроксимации этих диаграмм с помощью более простых графиков. Так, например, для стали ВСт. 3, у которой  $\sigma_{пл}$ ,  $\sigma_{уп}$ ,  $\sigma_T$  имеют близкие значения, принимается диаграмма в виде двух прямых, считая, что все три указанных напряжения соответствуют одной точке.

Такая диаграмма называется диаграммой *Прандтля*.

### **3.8. Расчет на прочность при центральном (осевом) растяжении или сжатии. Метод допускаемых напряжений**

Основной задачей расчета конструкции является обеспечение её прочности в условиях эксплуатации.

Зная механические характеристики материалов, можно перейти к оценке прочности и соответствующим расчетам при центральном растяжении и сжатии стержней.

Проектирование начинается с выбора материала. При этом учитываются условия работы сооружения, технология изготовления и монтажа конструкций, а также экономические соображения.

Применяемые в строительстве материалы можно условно разделить на *пластичные и хрупкие*.

Хрупкие материалы разрушаются при очень малых деформациях, а пластичные получают значительные пластические деформации.

Пластичные материалы почти одинаково работают на растяжение и сжатие, а хрупкие, как правило, плохо работают на растяжение и хорошо сопротивляются сжатию.

Механические испытания материалов дают предельные значения напряжений, достижение которых в элементах конструкций вызывает или разрушение или появление недопустимо больших деформаций.

Для безопасной работы конструкции необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в её элементах, были ниже предельных напряжений (предел прочности, предел текучести).

*В настоящее время применяются два метода расчета на прочность: по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям.*

Оба метода преследуют одну цель — обеспечить сооружению прочность и долговечность.

Наиболее распространенным расчетом на прочность при центральном растяжении (сжатии) является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому наибольшее нормальное напряжение, возникающее в материале, не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы. Эта величина называется *допускаемым напряжением*, то есть

$$\sigma_{\max} = [\sigma]. \quad (3.14)$$

**Определение 3.14** Допускаемым напряжением называется наибольшее напряжение, при котором обеспечивается прочность и долговечность проектируемого элемента конструкции.

Допускаемое напряжение обозначается теми же буквами, что и действующие напряжения, но заключаются в квадратные скобки  $[\sigma]$  или  $[\tau]$ .

Допускаемое напряжение составляет некоторую долю предельных, то есть в качестве допускаемого напряжения выбирают величину

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}. \quad (3.15)$$

**Определение 3.15** Число  $n$ , показывающее во сколько раз допускаемое напряжение меньше предельного, называется коэффициентом запаса прочности.

Величина  $n$  всегда больше единицы. В машиностроении запасы прочности сравнительно невелики:  $n = 1.5 - 2$ . В строительстве они существенно выше:  $n = 2 - 5$ , что связано с большей опасностью возможных последствий при аварии.

В случае хрупкого материала за исходное предельное напряжение берется предел прочности. В этом случае допускаемое напряжение равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{n}. \quad (3.16)$$

В случае пластичного материала за исходное предельное напряжение берется предел текучести, то есть

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n}. \quad (3.17)$$

Необходимость введения коэффициента запаса прочности вызывается следующими обстоятельствами:

- разбросом в определяемых из опытов величинах предела текучести  $\sigma_{\text{T}}$  и предела прочности  $\sigma_{\text{пч}}$  для данного материала;
- неточностью методов расчета;

— неточностью изготовления деталей;  
— отклонением расчетных схем от допущений, принятых при выводе расчетных формул и т.д.

На величину коэффициента запаса прочности влияет ряд факторов:

— качество и степень однородности материала. Чем однороднее материал, тем меньше можно брать запас прочности ( $n_{ст} = 1.5 - 3$ ;  $n_{бетон} = 3$ ;  $n_{дерево} = 3 - 5$  и т. д.);

— долговечность и значимость сооружения;

— уровень развития техники и т. д.

Величины допускаемых напряжений устанавливаются СП (Сводом правил).

Максимальное нормальное напряжение в стержне при центральном растяжении (сжатии) возникает в сечении, где продольная сила достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

**Определение 3.16** *Сечение, в котором продольная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение  $N_{max}$ , называется опасным сечением стержня по нормальным напряжениям.*

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения в стержне при центральном растяжении (сжатии) будут равны

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A}. \quad (3.18)$$

Следовательно, условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]. \quad (3.19)$$

В этой формуле:

$\sigma_{max}$  — максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N_{max}$  — максимальная продольная сила в стержне;

$A$  — площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma]$  — допускаемое нормальное напряжение.

При расчете элементов конструкции, работающих на центральное растяжение или сжатие, встречаются задачи трех типов:

а) *Проектный расчет.* По заданной нагрузке определяют продольную силу  $N$  и из условия прочности находят величину требуемой площади поперечного сечения

$$A_{\text{треб}} \geq \frac{N_{\text{max}}}{[\sigma]}. \quad (3.20)$$

б) *Определение допускаемой нагрузки.* Решение второй задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям). По известной площади  $A$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  определяют наибольшую величину допускаемой нагрузки

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A. \quad (3.21)$$

По найденному значению  $N$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в) *Проверочный расчет.* По известным значениям  $N$ ,  $A$ ,  $[\sigma]$  проверяют выполнение условия прочности (3.19).

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} \leq [\sigma].$$

### **3.9. Понятие о расчете по предельным состояниям. Расчет по I–й группе предельных состояний**

При помощи одного коэффициента запаса прочности трудно учесть все факторы, которые для различных сооружений могут проявляться в разных комбинациях. С целью более точного учета влияния различных факторов на величину запаса прочности советские ученые предложили в 1955 году новый метод расчета по предельным состояниям.

**Определение 3.17** *Предельным называют такое состояние конструкции, при котором она перестаёт удовлетворять эксплуатационным требованиям.*

Нормами установлены три вида предельных состояний:

**Первое предельное состояние**, определяемое несущей способностью (прочностью или устойчивостью). На это предельное состояние рассчитываются все конструкции.

**Второе предельное состояние**, зависящее от развития чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции.

**Третье предельное состояние**, определяемое образованием или раскрытием трещин (относится, в основном, к железобетонным конструкциям).

В сопротивлении материалов рассматривается, главным образом, первое предельное состояние, связанное с прочностью конструкции, и отчасти второе.

При расчете по предельным состояниям запас прочности определяется методом частных коэффициентов.

В этом случае коэффициент запаса находится как произведение трех коэффициентов, учитывающих влияние различных факторов: перегрузок (случайные отклонения от нормативных нагрузок), неоднородности материала и условий работы.

1. Коэффициент перегрузки  $n$  учитывает неточности в определении нагрузки. Фактическая нагрузка может отклоняться от нормативной (устанавливается СП (Сводом правил)) в неблагоприятную сторону. Для учета такого отклонения и вводят коэффициент перегрузки, который может быть  $n > 1$ , а в отдельных случаях  $n < 1$ . Нормативную нагрузку умножают на этот коэффициент и расчет производят на действие расчетной нагрузки

$$N_{\text{расч}} = N_1 \cdot n_1 + N_2 \cdot n_2 + \dots + N_n \cdot n_n, \quad (3.22)$$

где  $N_1, N_2, N_n$  — нормативные усилия от различных видов нагрузки;

$n_1, n_2, n_n$  — соответствующие этим нагрузкам коэффициенты перегрузки.

Полные данные о величинах коэффициентов перегрузки приведены в СП (Свод правил) и СНИП (строительные нормы и правила).

2. Коэффициент однородности  $k$  вводят для учета возможности снижения прочности вследствие неоднородности материала, из которого изготовлена конструкция. Чем однороднее материал, тем ближе к единице коэффициент  $k$ .

3. Коэффициент условий работы  $m$  учитывает специфические особенности работы материала элементов конструкции и их соединений, например, наличие агрессивной среды, влажности, резких смен температуры и т.д. При неблагоприятных условиях работы принимают  $m < 1$ , при нормальных —  $m = 1$ , при особо благоприятных условиях работы в отдельных случаях  $m > 1$ .

При поставках партий материала, например, стали, бетона, цемента, испытывают образцы, изготовленные из этого материала. Для каждого материала установлено нормативное сопротивление  $R^H$ , то есть напряжение, которое как минимум должно быть обеспечено при испытании образцов данной марки.

Для пластичных материалов за нормативное сопротивление принимают наименьшее значение предела текучести  $\sigma_T$ , а для хрупких — предела прочности  $\sigma_{пч}$ .

При расчете на прочность вводят расчетное сопротивление  $R$  данного материала, определяемое как произведение нормативного сопротивления  $R^H$  на коэффициент однородности  $k$  и условий работы  $m$

$$R = R^H \cdot k \cdot m. \quad (3.23)$$

Следовательно, условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по методу предельных состояний имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\text{расч}}}{A} \leq R. \quad (3.24)$$

В этой формуле

- $\sigma_{\max}$  — максимальное нормальное напряжение в стержне;
- $N_{\text{расч}}$  — расчетная продольная сила в стержне;
- $A$  — площадь поперечного сечения стержня;
- $R$  — расчетное сопротивление.

Три вида расчета на прочность при центральном растяжении (сжатии) по методу предельных состояний:

а) *Проектный расчет.* По заданной нагрузке определяют продольную силу  $N$  и из условия прочности находят величину требуемой площади поперечного сечения

$$A_{\text{треб}} \geq \frac{N_{\text{расч}}}{R}. \quad (3.25)$$

б) *Определение допускаемой нагрузки.* Решение этой задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны расчетному сопротивлению  $R$ ). По известной площади  $A$  и расчетному сопротивлению  $R$  определяют наибольшую величину допускаемой нагрузки

$$[N]_{\text{расч}} \leq R \cdot A. \quad (3.26)$$

По найденному значению  $[N]_{\text{расч}}$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в) *Проверочный расчет.* По известным значениям  $N$ ,  $A$ ,  $R$  проверяют выполнение условия прочности (3.24).

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{[N]_{\text{расч}}}{A} \leq R.$$

### **3.10. Учет собственного веса при центральном растяжении или сжатии**

Во многих инженерных конструкциях собственный вес -- это одна из основных нагрузок.

Например, при расчете канатов шахтных подъемников, штанг бурильных установок, устоев мостов, стен зданий, плотин собственный вес необходимо учитывать.

Собственный вес стержня является нагрузкой, распределенной вдоль его оси, вызывающей либо растяжение, либо сжатие. Распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью

$$q(x) = \gamma \cdot A(x).$$

В этой формуле

$q(x)$  — интенсивность распределенной нагрузки;

$\gamma$  — объемный вес материала стержня;

$A$  — площадь поперечного сечения стержня;

$A(x)$  — площадь поперечного сечения стержня.

Если

$$A(x) = A = \text{const},$$

то

$$q(x) = \gamma \cdot A(x) = \text{const},$$

то есть интенсивность распределенной нагрузки изменяется по закону прямой, параллельной оси стержня.

Рассмотрим прямой стержень постоянного поперечного сечения большой длины, закрепленный верхним концом и нагруженный на свободном конце силой  $F$ .

Определим закон изменения напряжений в поперечных сечениях этого стержня, а также перемещения сечений по длине стержня, учитывая влияние его собственного веса (рис. 3.8).

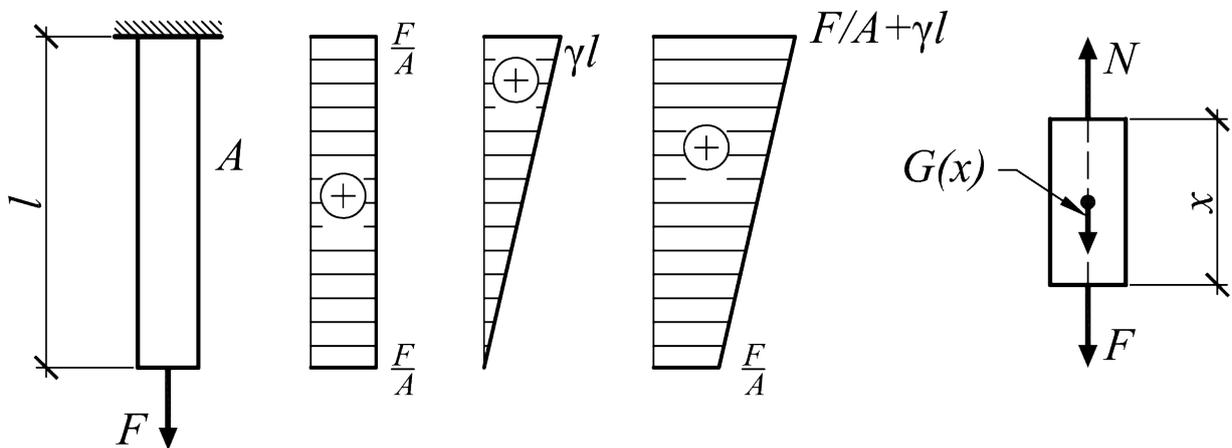


Рис. 3.8

Напряжения в стержне при его центральном растяжении (сжатии) определяются по формуле (3.4)

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Следовательно, напряжения в поперечных сечениях стержня при его центральном растяжении (сжатии) от совместного действия внешней нагрузки  $F$  и собственного веса  $G_x$  можно определить по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F + G_x}{A} = \frac{F}{A} + \frac{G_x}{A}, \quad (3.27)$$

где  $G_x = V_x \cdot \gamma = A \cdot x \cdot \gamma$  — составляющая продольной силы  $N$  от собственного веса;

$V_x$  — объем рассматриваемой (отсеченной) части стержня.

Тогда

$$\sigma = \frac{F}{A} + \gamma \cdot x. \quad (3.28)$$

Следовательно,

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l. \quad (3.29)$$

Условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l \leq [\sigma]. \quad (3.30)$$

Откуда

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma \cdot l}. \quad (3.31)$$

Определим закон изменения перемещений поперечных сечений стержня по его длине, *учитывая влияние только собственного веса.*

Перемещения стержня при его центральном растяжении (сжатии) определяются по формуле (3.9)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

Выделим в стержне на расстоянии  $x$  бесконечно малый элемент  $dx$  (рис. 3.9)

В этом случае продольная сила  $N$  от собственного веса стержня будет равна

$$N = G_{(x)} = \gamma \cdot A \cdot x. \quad (3.32)$$

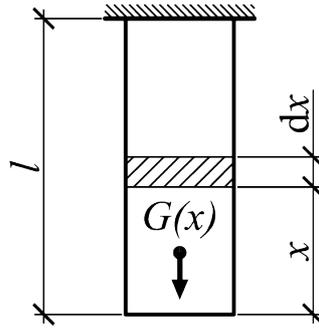


Рис. 3.9

Следовательно, перемещения стержня при его центральном растяжении (сжатии) с учетом собственного веса определяются по формуле

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \rightarrow d(\Delta l_{(G)}) = \frac{G_x \cdot A}{E \cdot A} = \frac{\gamma \cdot A \cdot x \cdot dx}{E \cdot A}. \quad (3.33)$$

Проинтегрировав это выражение по длине стержня, получим

$$\Delta l_{(G)} = \frac{\gamma}{E} \cdot \int_0^l x dx = \frac{G \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} = \frac{G \cdot l}{2 \cdot E \cdot A}. \quad (3.34)$$

Таким образом, перемещения стержня при его центральном растяжении (сжатии) с учетом только собственного веса определяются по формуле

$$\Delta l_{(G)} = \frac{G \cdot l}{2 \cdot E \cdot A}, \quad (3.35)$$

где  $G = \gamma \cdot A \cdot l$  — собственный вес всего стержня.

Перемещения этого стержня при его центральном растяжении (сжатии) от внешней силы  $F$ , приложенной на его конце, и равной по величине весу стержня  $G$ , то есть  $F = G$ , будет равно (3.9)

$$\Delta l_{(F)} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{G \cdot l}{E \cdot A}. \quad (3.36)$$

Сравнивая формулы (3.35) и (3.36), замечаем, что абсолютное удлинение стержня от своего собственного веса будет в два раза меньше удлинения стержня от силы, приложенной на его конце и равной по величине весу стержня.

### 3.11. Брус равного сопротивления растяжению–сжатию. Ступенчато–призматические стержни (брусья)

При расчете на прочность стержней постоянного сечения с учетом собственного веса во всех сечениях, кроме опасного, напряжения будут ниже допустимого, что приводит к перерасходу материала. Однако, можно проектировать стержень такого переменного сечения, у которого во всех поперечных сечениях напряжения будут одинаковыми и равными допустимому напряжению. Такой стержень называется стержнем (брусом) *равного сопротивления растяжению или сжатию*.

Установим закон изменения площади поперечного сечения по длине такого стержня (рис. 3.10).

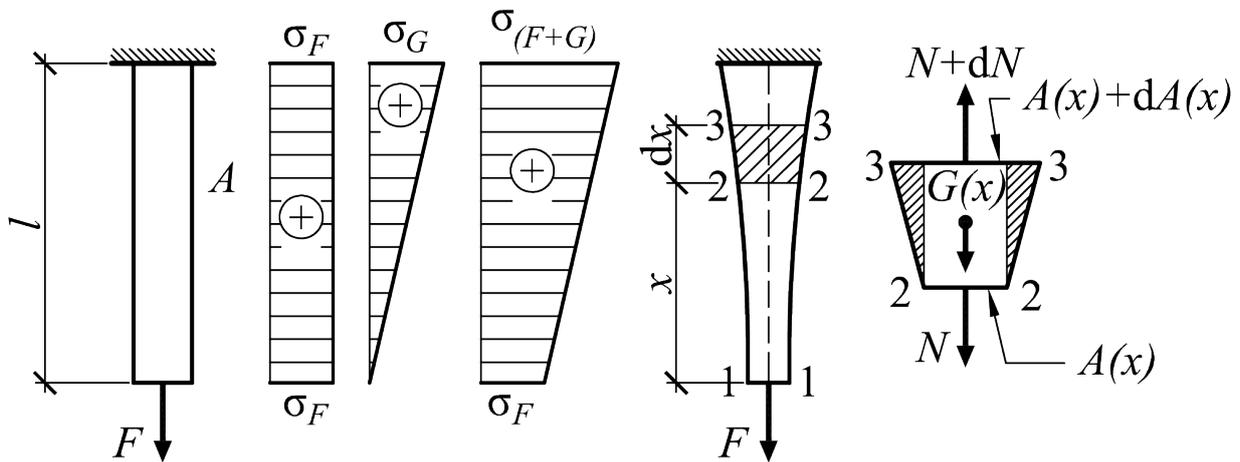


Рис. 3.10

В произвольном сечении стержня на расстоянии  $x$  выделим бесконечно малый элемент  $dx$ . Определим напряжения в различных сечениях:

$$\begin{aligned}
 \text{Сечение 1-1:} \quad \sigma_{1-1} &= \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0} = \sigma; \\
 \text{Сечение 2-2:} \quad \sigma_{2-2} &= \frac{N}{A_x} = \frac{F + G_x}{A_x} = \sigma; \\
 \text{Сечение 3-3:} \quad \sigma_{33} &= \frac{N + dN}{A_x + dA_x} = \sigma,
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

где  $dN = dG_x = \gamma \cdot A_x \cdot dx$ .

Разделив числитель и знаменатель на  $A_x$  получим

$$\left( \frac{N}{A} + \frac{\gamma A_x dx}{A_x} \right) / \left( \frac{A_x}{A_x} + \frac{dA_x}{A_x} \right) = \sigma \rightarrow \sigma + \gamma \cdot dx = \sigma + \sigma \cdot \frac{dA_x}{A_x} \rightarrow \frac{\gamma}{\sigma} \cdot dx = \frac{dA_x}{A_x}.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение с разделенными переменными, получим

$$\frac{\gamma}{\sigma} \cdot x = \ln A_x + C. \quad (3.38)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из условия, что при  $x = 0, A_x = A_0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = \ln A_0 + C &\rightarrow C = -\ln A_0 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\gamma}{\sigma} \cdot x = \ln A_x - \ln A_0 = \ln \frac{A_x}{A_0} &\rightarrow \\ \rightarrow e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma}} = \frac{A_x}{A_0} \rightarrow A_x = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma}}. &(3.39) \end{aligned}$$

Если

$$\sigma = [\sigma],$$

то

$$A_x = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{[\sigma]}}. \quad (3.40)$$

Изготовить брус, имеющий такую сложную форму, затруднительно, поэтому на практике изготавливают брус ступенчато–призматическим таким образом, чтобы в пределах каждого участка верхнее (или нижнее) сечение работало при напряжениях равных  $[\sigma]$ .

Из (3.29) имеем

$$A_1 \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma \cdot l_1}, \quad \text{а} \quad G_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot l_1.$$

Следовательно,

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} + \frac{G_1}{A_2} + \gamma \cdot l_2 \leq [\sigma] \rightarrow \frac{F}{A_2} + \frac{\gamma \cdot A_1 \cdot l_1}{A_2} + \gamma \cdot l_2 \leq [\sigma].$$

Отсюда

$$A_2 \geq \frac{F \cdot [\sigma]}{([\sigma] - \gamma \cdot l_1) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_2)}.$$

Таким образом

$$A_n \geq \frac{F \cdot [\sigma^{n-1}]}{([\sigma] - \gamma \cdot l_1) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_2) \cdot \dots \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_n)}. \quad (3.41)$$

### 3.12. Статически неопределимые задачи при растяжении или сжатии

В инженерной практике часто встречаются системы, в которых число наложенных связей (число опорных реакций) больше числа уравнений равновесия (статики). В этих системах, используя только уравнения равновесия, невозможно определить ни реакции опор, ни внутренние усилия, возникающие в элементах конструкций. Такие системы называются статически неопределимыми.

**Определение 3.18** *Статически неопределимые системы — это упругие стержневые системы, у которых число неизвестных опорных реакций (внутренних усилий) превышает число независимых уравнений равновесия (уравнений статики), возможных для этой системы.*

**Определение 3.19** *Степень статической определимости (неопределимости) простых стержневых систем обычно определяется как разность между количеством неизвестных опорных реакций (внутренних усилий) и количеством уравнений равновесия (уравнений статики), которые можно составить для данной системы.*

Для определения всех неизвестных опорных реакций (внутренних усилий) статически неопределимой системы составляют дополнительные уравнения.

Эти необходимые для решения рассматриваемой задачи дополнительные уравнения можно составить, изучая деформации, испытываемые системой.

Всякая конструкция деформируется так, что не происходит разрывов стержней и разъединения их друг от друга. В этом и заключается совместность деформаций элементов системы.

Оказывается, что всегда можно найти столько дополнительных уравнений, сколько необходимо, чтобы полное число уравнений вместе с уравнениями статики равнялось числу неизвестных опорных реакций (внутренних усилий).

Эти дополнительные уравнения составляются на основании общего принципа -- они должны выражать условия совместности деформаций системы, поэтому называются *уравнениями совместности деформаций (уравнения перемещений)*.

Количество дополнительных уравнений совместности деформаций, необходимых для раскрытия статической неопределимости, должно быть равно степени статической неопределимости системы.

Решение системы уравнений равновесия и совместности деформаций позволяет определить все неизвестные опорные реакции (внутренние усилия).

Этот этап решения задачи называется раскрытием статической неопределимости системы.

*Раскрыть статическую неопределимость системы — это значит определить численные значения всех опорных реакций (внутренних усилий).*

### **3.13. Порядок решения статически неопределимых задач**

Статически неопределимые конструкции рассчитываются, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи.

При этом придерживаются следующего порядка:

1. *Статическая сторона задачи.* Определяется степень статической неопределимости системы. Составляются уравнения равновесия, содержащие неизвестные опорные реакции (внутренние усилия) системы.

2. *Геометрическая сторона задачи.* Рассматриваются деформации, испытываемые системой, и записываются уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений).

3. *Физическая сторона задачи.* На основании закона Гука (Формула (3.9) для определения перемещений стержня при его центральном растяжении (сжатии), которая получена на основе закона Гука), уравнения совместности деформаций выражаются через неизвестные опорные реакции (внутренние усилия).

4. *Синтез уравнений.* Решая совместно систему уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи, определяются численные значения всех опорных реакций (внутренних усилий).

Рассмотрим шарнирно–стержневую систему, в которой груз  $F$  подвешен на трех стержнях (рис. 3.11, а)

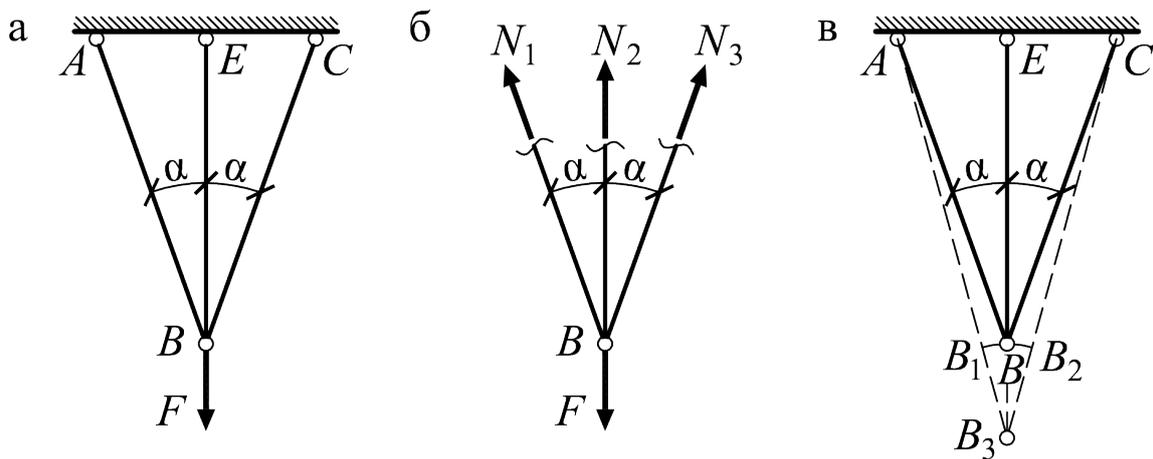


Рис. 3.11

В этом случае число неизвестных усилий, действующих в поперечных сечениях стержней, равно трем ( $N_1, N_2, N_3$ ), а уравнений равновесия (статики) для их определения — два ( $\sum F_x = 0$  и  $\sum F_z = 0$ ).

Таким образом, узел находится в равновесии под действием 4-х сил, три из которых неизвестны (рис. 3.11, б).

#### I. Статическая сторона задачи

Рассматриваемая система один раз статически неопределимая

$$n = 3 - 2 = 1,$$

где  $n$  — степень статической неопределимости системы;

3 — число неизвестных усилий ( $N_1, N_2, N_3$ );

2 — число уравнений равновесия (статики) для их определения.

Составим уравнения равновесия для рассматриваемой системы:

— Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю:

$$\sum F_x = 0: \quad -N_1 \cdot \sin \alpha + N_2 \cdot \sin \alpha = 0; \quad \rightarrow \quad N_1 = N_2. \quad (3.42)$$

— Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $z$  равна нулю:

$$\sum F_z = 0: \quad N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \alpha + N_3 - F = 0.$$

Учитывая (3.42), получим

$$2N_1 \cdot \cos \alpha + N_3 = F. \quad (3.43)$$

#### II. Геометрическая сторона задачи.

Рассмотрим деформацию системы. Под воздействием силы  $F$  во всех трех стержнях возникает растяжение. Растягивающие продольные усилия в стержнях должны быть такими, чтобы удлинения крайних стержней были согласованы с удлинением среднего.

Согласованность деформаций состоит в том, что до и после деформации нижние концы всех стержней должны быть в одном узле. Учитывая, что деформации стержней малы по сравнению с их линейными размерами, можно считать, что углы, составляемые крайними стержнями со средним, после деформации практически такие же, как и до деформации.

Из рисунка (рис. 3.11, в) находим, что отрезок  $BB_3$  равен

$$BB_3 = \Delta l_3.$$

Для определения удлинения первого стержня, отложим на его новой длине  $AB_3$ , первоначальную длину, равную  $AB_1$ . В силу малости перемещений дугу  $BB_1$  заменяем перпендикуляром, опущенным из точки  $B$  на линию  $AB_3$ . Тогда

$$\Delta l_1 = AB_3 - AB_1 = B_1B_3.$$

Из прямоугольного треугольника  $BB_1B_3$  установим связь между удлинениями стержней

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha.$$

Следовательно, уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha. \quad (3.44)$$

III. Физическая сторона задачи.

Перемещения стержня при его центральном растяжении (сжатии) определяются по формуле (3.9)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

Принимая жесткости всех стержней одинаковыми, находим удлинения стержней

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EA}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA}. \quad (3.45)$$

Если учесть выражения (3.45) для удлинений стержней при их растяжении, то уравнение совместности деформаций (3.44) можно записать в виде

$$\frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{N_3 l_3 \cos \alpha}{EA}.$$

Учитывая, что

$$l_3 = l_1 \cdot \cos \alpha,$$

получим

$$\frac{N_1}{EA} = \frac{N_3 \cos^2 \alpha}{EA} \rightarrow N_1 = N_3 \cos^2 \alpha. \quad (3.46)$$

#### IV. Синтез уравнений.

Решая совместно систему уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи, определяются численные значения всех опорных реакций (внутренних усилий).

Мы получили систему трех уравнений (3.42), (3.43) и (3.46), в которые вошли 3 неизвестные  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . Решая эту систему уравнений, определим численные значения внутренних усилий  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ .

Из уравнения (3.43) имеем

$$N_1 = \frac{F - N_3}{2 \cos \alpha}. \quad (3.47)$$

Подставляя в полученное выражение (3.47) уравнение (3.46), определим численное значение внутреннего усилия  $N_3$

$$N_3 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (3.48)$$

Подставив в выражение (3.46) полученное значение  $N_3$  (3.48), определим численные значения внутренних усилий  $N_1$  и  $N_2$

$$N_1 = N_2 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (3.49)$$

### 3.14. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Центральное растяжение или сжатие прямого бруса»

1. Какой вид деформации называется центральным растяжением (сжатием)?
2. В чем заключается метод сечений?
3. Как определяется численное значение продольной силы?
4. Что называется эпюрой продольных сил?
5. План построения эпюры продольных сил.
6. По какой формуле определяются нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии) в произвольной точке поперечного сечения стержня?
7. Что называется коэффициентом поперечной деформации?
8. Сформулируйте закон Гука. Как он выражается математически?
9. По какой формуле определяется величина продольной деформации участка стержня?
10. Что характеризует модуль упругости первого рода (модуль Юнга) и какая его размерность?
11. От чего зависит численное значение модуля упругости первого рода (модуля Юнга)?
12. Что называется жесткостью стержня при центральном растяжении и сжатии?
13. Как строятся диаграммы растяжения и напряжения?
14. Перечислите характерные точки диаграмм растяжения и напряжения.
15. В чем разница между пластичными и хрупкими материалами?
16. Перечислите основные механические характеристики материалов.
17. Дайте определение допускаемому напряжению и коэффициенту запаса прочности.
18. Как определяется величина допускаемого напряжения для пластичных и хрупких материалов?

19. Какие факторы влияют на величину допускаемого напряжения и коэффициента запаса прочности?
20. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений?
21. Какие три типа задач, вытекают из условия прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений?
22. Какое состояние конструкции называется предельным?
23. Сколько предельных состояний Вы знаете?
24. Что учитывает коэффициент перегрузки?
25. Как определяется расчетная нагрузка?
26. Что учитывает коэффициент однородности?
27. Что учитывает коэффициент условий работы?
28. Как определяется величина нормативного сопротивления?
29. Как определяется величина расчетного сопротивления?
30. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу предельных состояний.
31. Три вида расчета на прочность по методу предельных состояний?
32. Как учитывается собственный вес при центральном растяжении (сжатии)?
33. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений с учетом собственного веса?
34. По какой формуле определяется величина продольной деформации участка стержня с учетом собственного веса?
35. Какой брус называется бруском равного сопротивления?
36. Какие системы называются статически неопределимыми?
37. Как определяется степень статической неопределимости системы?
38. План решения статически неопределимых задач?

## Тема 4. Напряжённое состояние тел

### 4.1. Виды напряженного состояния

Взаимодействие между частями элемента конструкции можно охарактеризовать величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке элемента. Их значения зависят от ориентации сечения, проведенного через данную точку.

**Определение 4.1** *Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующим по всевозможным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется напряженным состоянием в этой точке.*

Исследуя напряженное состояние в рассматриваемой точке тела, в окрестности ее выделяют элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Полные напряжения на гранях параллелепипеда раскладывают на составляющие по координатным осям. Изменяя ориентацию элементарного объема всегда можно найти такое его положение, при котором по всем его граням касательные напряжения будут равны нулю.

**Определение 4.2** *Грани элементарного объема (площадки), на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными площадками, а нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, — главными напряжениями.*

При исследовании вопросов прочности в сложном напряженном состоянии существенное значение имеет вид напряженного состояния. Значения главных напряжений определяют вид напряженного состояния. Существует три основных вида напряженного состояния.

**Определение 4.3** *Напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю, называется одноосным (однородным) или линейным напряженным состоянием (рис. 4.1, а).*

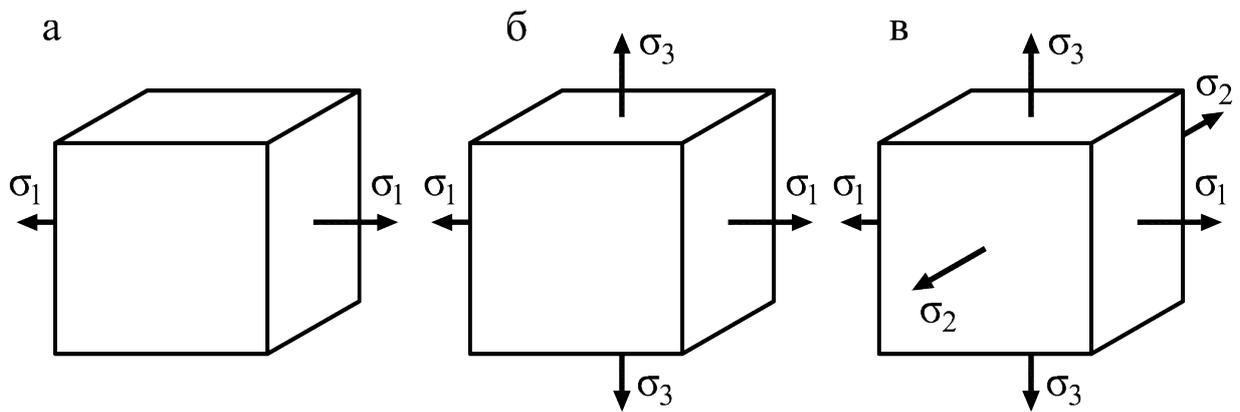


Рис. 4.1

**Определение 4.4** *Напряженное состояние, в котором два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, называется двухосным или плоским напряженным состоянием (рис. 4.1, б).*

**Определение 4.5** *Напряженное состояние, в котором все три главных напряжения отличны от нуля, называется пространственным или трехосным напряженным состоянием (рис. 4.1, в).*

#### 4.2. Одноосное напряжённое состояние. Напряжения в наклонных сечениях бруса при центральном растяжении (сжатии)

Имея эпюру продольных сил  $N$ , нормальные напряжения в любом поперечном сечении стержня при центральном растяжении (сжатии) достаточно просто определяются по формуле (3.4)

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Во многих задачах возникает необходимость определения напряжений в наклонных сечениях.

Рассмотрим напряжения в наклонных сечениях бруса. Обозначим  $\alpha$  угол между наклонным сечением  $n-n_2$  и поперечным сечением  $n-n_1$  (рис. 4.2, а).

Правило знаков. Будем считать угол  $\alpha$  положительным, когда поперечное сечение для совмещения с наклонным сечением надо повернуть на этот угол против хода часовой стрелки (рис. 4.2, а).

Установим, чему равно напряжение, возникающее в любом наклонном сечении, нормаль к плоскости которого составляет с осью стержня угол  $\alpha$ .

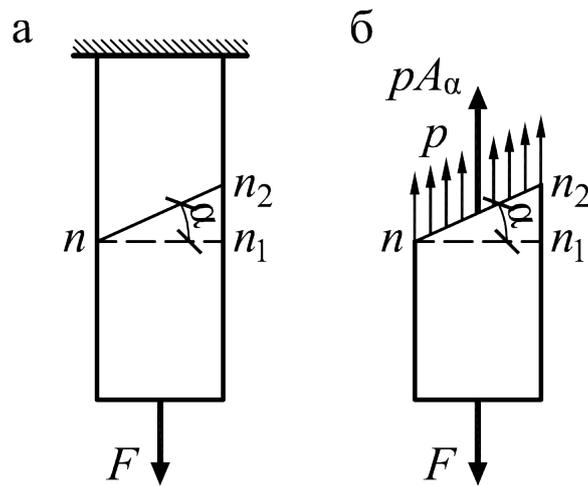


Рис. 4.2

Как известно удлинения всех волокон, параллельных оси бруса, при его растяжении или сжатии одинаковы. Это позволяет предполагать, что напряжения  $p$  во всех точках наклонного (так же, как и поперечного) сечения одинаковы.

Рассмотрим нижнюю часть бруса, отсеченную сечением  $n—n_2$  (рис. 4.2, б). Из условия ее равновесия следует, что напряжения  $p$  параллельны оси бруса и направлены в сторону, противоположную внешней силе  $F$ .

Следовательно,

$$N = F = p \cdot A_\alpha. \quad (4.1)$$

откуда

$$p = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N \cdot \cos \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos \alpha, \quad (4.2)$$

где  $A_\alpha$  — площадь наклонного сечения  $n—n_2$  ( $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$ );

$A$  — площадь поперечного сечения  $n—n_1$ ;

$\sigma = \frac{N}{A}$  — нормальное напряжение в поперечном сечении бруса.

Разложим напряжение  $p$  на два составляющих напряжения: нормальное  $\sigma_\alpha$ , перпендикулярное к плоскости наклонного сечения  $n—n_2$ , и касательное  $\tau_\alpha$ , параллельное этой плоскости (рис. 4.3).

Значения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  будут равны

$$\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \quad (4.3)$$

$$\tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (4.4)$$

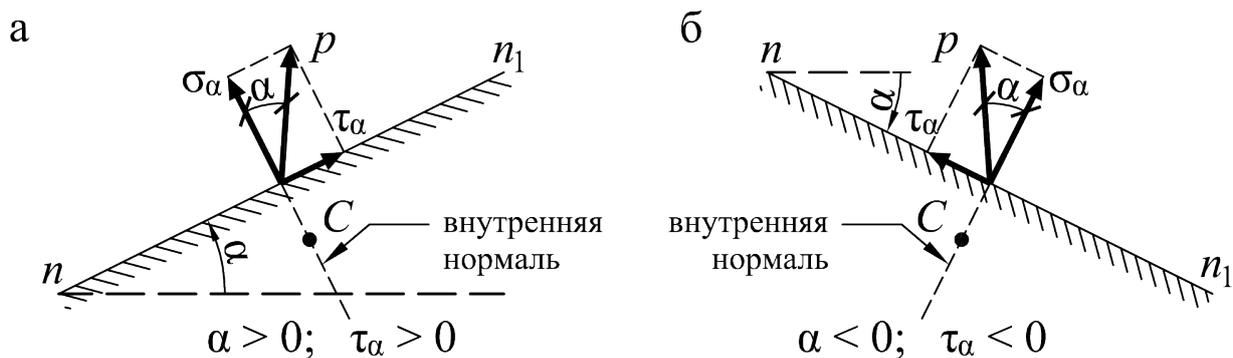


Рис. 4.3

Правило знаков. Нормальное напряжение  $\sigma$  считается положительным при растяжении.

Правило знаков. Касательное напряжение  $\tau$  положительно, если изображающий его вектор стремится вращать тело относительно любой точки  $C$ , лежащей на внутренней нормали к сечению, по ходу часовой стрелки (рис. 4.3).

Полученные соотношения называются формулами для определения напряжений на наклонных площадках при центральном растяжении или сжатии.

Из формулы (4.3) следует, что нормальные напряжения  $\sigma_\alpha$  имеют значения от  $\sigma = \frac{F}{A}$  (при  $\alpha = 0$ ) до  $\sigma = 0$  (при  $\alpha = 90^\circ$ ).

Таким образом, наибольшие (по абсолютной величине) нормальные напряжения имеют место в поперечных сечениях бруса.

**Определение 4.6** Плоскости сечений, в которых нормальные напряжения достигают наибольшего и, соответственно, наименьшего значений, называются главными плоскостями (главными площадками).

**Определение 4.7** Наибольшее и наименьшее нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются главными напряжениями.

**Определение 4.8** Направления, по которым действуют главные напряжения, называются главными направлениями.

Из формулы (4.4) следует, что касательные напряжения  $\tau_\alpha$  имеют значения от  $\frac{\sigma}{2} = +\frac{F}{2A}$  при ( $\alpha = 45^\circ$ ) до  $-\frac{\sigma}{2} = -\frac{F}{2A}$  (при  $\alpha = -45^\circ$ ). В этом случае

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma}{2}. \quad (4.5)$$

Касательные напряжения  $\tau_\alpha = 0$  при  $\alpha = 0$  и при  $\alpha = 90^\circ$ .

Таким образом, в площадках с наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями (главные площадки) касательные напряжения равны нулю.

Так как на главных площадках касательные напряжения отсутствуют, то *главные площадки — это площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.*

Рассмотрим напряжения, возникающие в двух произвольно расположенных, взаимно перпендикулярных сечениях при одноосном (центральном) растяжении–сжатии стержня.

Определим напряжения  $\sigma_{\alpha_1}$  и  $\sigma_{\alpha_2}$  в двух наклонных сечениях  $n_1 - n_1$  и  $n_2 - n_2$ , перпендикулярных друг к другу (рис. 4.4).

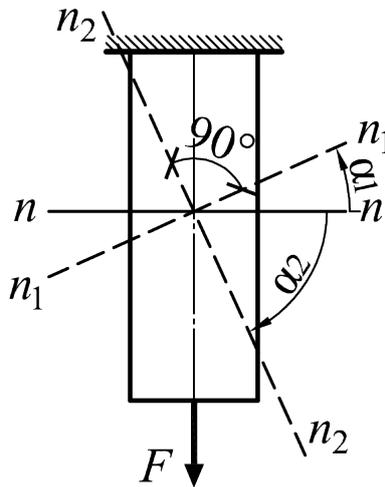


Рис. 4.4

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  наклона этих сечений к плоскости поперечного сечения бруса находятся между собой с учетом правила знаков в зависимости

$$\alpha_2 = -(90^\circ - \alpha_1) = \alpha_1 - 90^\circ.$$

По формуле (4.3) имеем

$$\sigma_{\alpha_1} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_1;$$

$$\sigma_{\alpha_2} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_2 = \sigma \cdot \cos^2 (\alpha_1 - 90^\circ) = \sigma \cdot \sin^2 \alpha_1.$$

Сложив нормальные напряжения  $\sigma_{\alpha_1}$  и  $\sigma_{\alpha_2}$ , получим

$$\sigma_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_2} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma \cdot \sin^2 \alpha_1 = \sigma. \quad (4.6)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная.*

### 4.3. Закон парности касательных напряжений

Определим напряжения  $\tau_{\alpha_1}$  и  $\tau_{\alpha_2}$  в двух наклонных сечениях  $n_1 - n_1$  и  $n_2 - n_2$ , перпендикулярных друг к другу (рис. 4.4).

По формуле (4.4) имеем

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha_2} &= \frac{\sigma}{2} \cdot \sin^2 \alpha_2 = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2(\alpha_1 - 90^\circ) = \\ &= -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha_1) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha_1 = -\tau_{\alpha_1}.\end{aligned}$$

То есть

$$\tau_{\alpha_2} = -\tau_{\alpha_1}. \quad (4.7)$$

Таким образом, *касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку* (закон парности касательных напряжений).

### 4.4. Плоское напряжённое состояние

При плоском напряженном состоянии на одной из площадок, проходящих через рассматриваемую точку, касательные и нормальные напряжения равны нулю.

В теории плоского напряженного состояния можно рассматривать две основные задачи:

Прямая задача. В точке известны положения главных площадок и значения главных напряжений. Требуется определить нормальные и касательные напряжения по наклонным площадкам.

Обратная задача. В точке известны нормальные и касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку. Требуется найти главные напряжения и положение главных площадок.

Наиболее часто встречается обратная задача, когда необходимо определить главные напряжения и положение главных площадок.

Математически эта задача идентична задаче определения главных моментов инерции и определения положения главных осей инерции.

В связи с этим, соответствующие формулы будут иметь вид

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2}; \quad (4.8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z}. \quad (4.9)$$

Знак (+) перед корнем берется, если  $\sigma_x > \sigma_z$ , знак (–) перед корнем берется, если  $\sigma_x < \sigma_z$ .

Угол, соответствующий экстремальному значению касательных напряжений, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha'_0 = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{zx}}. \quad (4.10)$$

При этом экстремальные касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных к главным площадкам под углом  $\pm 45^\circ$  и равны

$$\tau_{\alpha'_0} = \tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (4.11)$$

**Определение 4.9** *Площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения, называются площадками сдвига.*

Нормальные напряжения на площадках с экстремальными значениями касательных напряжений равны полу сумме главных напряжений

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (4.12)$$

#### 4.5. Пространственное напряженное состояние

**Определение 4.10** *Если через рассматриваемую точку тела нельзя провести ни одной площадки, в которой нормальные и касательные напряжения были бы равны нулю, то в этой точке имеется пространственное (трехосное) напряженное состояние.*

В курсе теории упругости доказывается, что при пространственном (трехосном) напряженном состоянии через каждую точку всегда можно провести три площадки, по которым касательные напряжения равны нулю.

Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие по ним, — *главными напряжениями*.

Все три главные площадки взаимно перпендикулярны.

Наибольшее (в алгебраическом смысле) главное напряжение принято обозначать  $\sigma_1$ , следующее по величине  $\sigma_2$ , а наименьшее  $\sigma_3$ , то есть

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (4.13)$$

или

$$\sigma_1 = \sigma_{\max}; \quad \sigma_3 = \sigma_{\min}. \quad (4.14)$$

Нормальные напряжения по любым другим площадкам, проходящим через данную точку, имеют промежуточные значения между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Аналитически напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  в любой площадке определяются по формулам, вывод которых приведен в курсе теории упругости

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3; \quad (4.15)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3}. \quad (4.16)$$

В этих формулах  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормальями к главным площадкам.

Если по формуле (4.15) определить нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам и сложить их значения, то сумма этих напряжений будет равна сумме главных напряжений

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (4.17)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная.*

#### 4.6. Обобщенный закон Гука

Формулы относительных деформаций бруса, полученные для случая его центрального растяжения (сжатия), можно обобщить на случай пространственного (трехосного) напряженного состояния ( $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  и  $\varepsilon' = \mu \cdot \varepsilon$ ).

Для этого выделим из тела элементарный параллелепипед (с бесконечно малыми размерами ребер), грани которого совпадают с главными площадками (рис. 4.5).

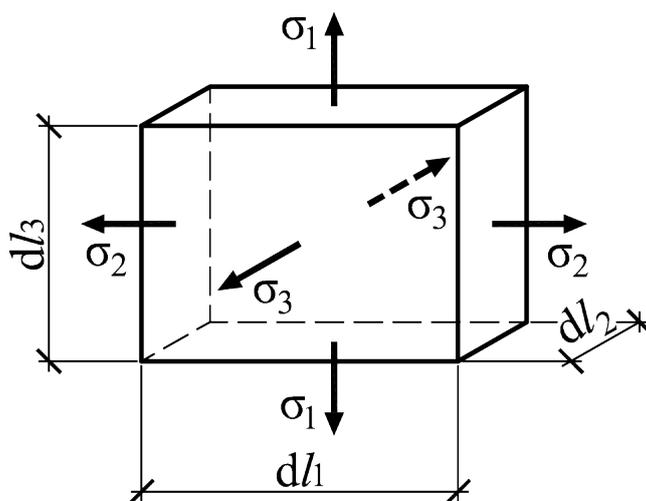


Рис. 4.5

Обозначим  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  главные направления, а  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  относительные деформации ребер параллелепипеда, параллельных этим направлениям.

Значения  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  определим на основании принципа независимости действия сил, последовательно рассматривая влияние напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

В результате воздействия напряжений  $\sigma_1$  относительные деформации равны

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = -\mu \cdot \varepsilon_{11} = -\mu \cdot \frac{\sigma_1}{E}. \quad (4.18)$$

Первый индекс при  $\varepsilon$  указывает направление относительной деформации, а второй — причину деформации. Так, например,  $\varepsilon_{21}$  является относительной деформацией в направлении  $\sigma_2$ , вызванной напряжением  $\sigma_1$ .

Аналогично, от воздействия  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  получим

$$\varepsilon_{12} = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{32} = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E}; \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = -\mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E}. \quad (4.20)$$

Относительные деформации, вызванные одновременным воздействием напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , равны

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23};$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33}.$$

После замены относительных деформаций их выражениями (4.18)–(4.20) формулы примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Аналогичные формулы можно получить и для случая, когда грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)], \end{aligned} \quad (4.22)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — нормальные напряжения, действующие по боковым граням элементарного параллелепипеда;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  — относительные деформации его ребер.

Выражения (4.21) и (4.22) устанавливают связь между деформациями и напряжениями при пространственном (трехосном) напряженном состоянии, поэтому носят название *обобщенного закона Гука*.

Примечание. Эти формулы применимы при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

#### 4.7. Закон Гука для плоского напряженного состояния. Объемная деформация

Связь между напряжениями и деформациями определяется природой сопротивления тела деформациям и, таким образом, имеет *физический* характер. Физическая сторона сопротивления материалов базируется на гипотезе о линейной зависимости между компонентами деформаций и компонентами напряжений в изотропном упруго–деформируемом твердом теле и опирается на следующие факты, наблюдаемые в опытах с образцами из изотропных материалов:

— при осевой деформации призматического, в частности круглого цилиндрического, образца не происходит изменения первоначально прямых углов между линейными элементами, из которых один совпадает с осью призмы, а второй лежит в поперечном сечении, то есть в процессе осевой деформации образец, изготовленный из изотропного материала, не перекашивается;

— при осевой деформации круглого цилиндрического образца происходит и его поперечная деформация (одинаковая во всех поперечных направлениях), составляющая от продольной деформации долю, определяемую коэффициентом Пуассона  $\mu$ ;

— при чистом сдвиге изменение углов между гранями элементарного параллелепипеда в плоскостях, параллельных одной координатной плоскости, не сопровождается изменением углов между остальными гранями, а сдвиги не сопровождаются изменением линейных размеров ребер, то есть сдвиги не связаны с линейной деформацией.

Аналитически эти зависимости описываются уравнениями, называемыми обобщенным законом Гука (4.22).

В случае плоского напряженного состояния в формулах обобщенного закона Гука необходимо положить

$$\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0; \quad \varepsilon_y = 0. \quad (4.23)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot \sigma_z]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot \sigma_x].\end{aligned}\quad (4.24)$$

Если полученные равенства решить относительно напряжений, то получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_z); \\ \sigma_z &= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_z + \mu \cdot \varepsilon_x).\end{aligned}\quad (4.25)$$

Выделим в окрестности некоторой точки тела до его деформации элементарный параллелепипед с ребрами  $dl_1$ ,  $dl_2$ ,  $dl_3$  так, чтобы его грани совпали с главными площадками (рис. 4.5).

Исходный объем элементарного параллелепипеда будет равен

$$dV = dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3.$$

После деформации длина всех ребер параллелепипеда изменится и станет равной

$$dl_1 \cdot (1 + \varepsilon_1); \quad dl_2 \cdot (1 + \varepsilon_2); \quad dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_3).$$

Объем параллелепипеда после деформации будет равен

$$\begin{aligned}dV_1 &= [dl_1 \cdot (1 + \varepsilon_1)] \cdot [dl_2 \cdot (1 + \varepsilon_2)] \cdot [dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_3)] \cdot = \\ &= dV \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3).\end{aligned}$$

Так как величины деформаций малы, то их произведениями можно пренебречь по сравнению с самими величинами. Тогда

$$dV_1 = dV \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Относительное изменение объема составит с учетом (4.21)

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{dV \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rightarrow \\ &\rightarrow \theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).\end{aligned}\quad (4.26)$$

Мы получили формулу (4.26) для вычисления объемной деформации.

#### 4.8. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Напряженное состояние в точке»

1. Что называется напряженным состоянием в точке?
2. Какие площадки называются главными?
3. Какие напряжения называются главными?
4. Какие три основных вида напряженного состояния в точке Вы знаете?
5. Какое напряженное состояние называется одноосным или линейным?
6. Какое напряженное состояние называется двухосным или плоским?
7. Какое напряженное состояние называется пространственным или трехосным или объемным?
8. По какой формуле определяются нормальные напряжения на наклонной площадке при центральном растяжении (сжатии)?
9. По какой формуле определяются касательные напряжения на наклонной площадке при центральном растяжении (сжатии)?
10. В каких сечениях бруса нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии) принимают наибольшее значение?
11. В каких сечениях бруса касательные напряжения при центральном растяжении (сжатии) принимают наибольшее значение?
12. Какие площадки называются главными?
13. Какие напряжения называются главными?
14. Чему равно касательное напряжение на главной площадке?
15. Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам?
16. В чем суть закона парности касательных напряжений?
17. Какие две основные задачи рассматриваются в теории плоского напряженного состояния?
18. По какой формуле определяется положение главных площадок при плоском напряженном состоянии?
19. По какой формуле определяются численные значения главных напряжений при плоском напряженном состоянии?

20. Как расположены площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения при плоском напряженном состоянии?

21. Как называются площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения?

22. Чему равны нормальные напряжения на площадках с максимальными (экстремальными) касательными напряжениями при плоском напряженном состоянии?

23. По каким формулам определяются численные значения нормальных и касательных напряжений по наклонным площадкам при пространственном (трехосном) напряженном состоянии?

24. Напишите формулы обобщенного закона Гука.

25. Напишите формулу закона Гука для плоского напряженного состояния.

26. По какой формуле определяется объемная деформация?

## Тема 5. Понятие о теориях прочности

### 5.1. Общие понятия. Критерии прочности

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности элемента конструкции по известному напряженному состоянию, то есть по известным главным напряжениям в каждой точке тела.

Решение задачи о прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, осуществляется с помощью теории предельных напряженных состояний или так называемых *теорий прочности*. Теории прочности представляют собой гипотезы о критериях, определяющих условия перехода материала в опасное состояние.

Трудность создания теорий прочности заключается в недостаточности представлений о внутренних процессах, происходящих в материале. В связи с этим задача решается в основном путем анализа и обобщения экспериментальных данных.

Построение теорий прочности основывается на предположении о том, что предельное состояние оказывается одинаковым и в линейном и в любом сложном напряженном состоянии.

Два каких либо напряженных состояний считаются равнопрочными и равноопасными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз, одновременно становятся предельными. В этом случае коэффициенты запаса  $k_1 = k_2$ .

Таким образом, равнопрочными (равноопасными) напряженными состояниями являются напряженные состояния, которые в заданных условиях имеют одинаковые коэффициенты запаса, то есть для вывода их из строя необходимо действующие в каждом из них нагрузки увеличить в одно и то же число раз. При этом под коэффициентом запаса в данном напряженном состоянии понимается число, показывающее, во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния, чтобы оно стало предельным.

Для заданного материала сравнение напряженных состояний можно производить по числовой характеристике какого либо одного напряженного состояния, выбираемого в качестве эталона. За такой эталон (эквивалент)

удобнее всего принять центральное растяжение с главным напряжением  $\sigma$  (рис. 5.1).

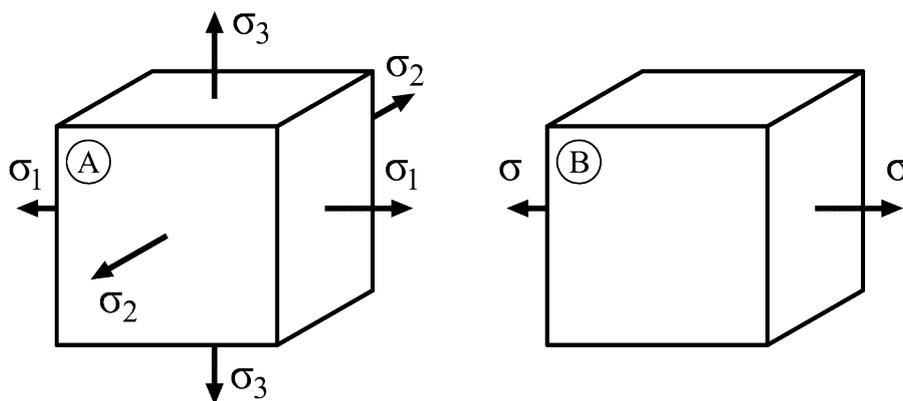


Рис. 5.1

Созданию теорий прочности предшествует гипотеза о том, какое из напряжений или какая их комбинация в сложном напряженном состоянии определяет переход к предельному состоянию — вырабатывается *критерий предельного состояния*.

Чтобы использовать принятую предпосылку (гипотезу) равнопрочности, необходимо связать главные напряжения двух равноопасных напряженных состояний определенной зависимостью. Это оказывается возможным, если известна общая причина разрушения материала. Однако определение истинной причины разрушения материала оказывается трудной и в настоящее время до конца не разрешимой еще задачей. Это обстоятельство не позволяет создать единую (общую) теорию прочности и повлекло за собой появление многих теорий.

Общим при этом является предположение о том, что напряженное состояние в точке остается *единственным* определяющим фактором механического состояния данного материала.

Критерием прочности при линейном напряженном состоянии считается: нормальное напряжение  $\sigma$ ; относительная линейная деформация  $\epsilon$ ; касательные напряжения  $\tau$ ; удельная потенциальная энергия формоизменения  $u_\Phi$ .

При рассмотрении материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, необходимо ввести тот или иной критерий прочности.

В зависимости от принимаемых критериев прочности применяют ту или иную теорию прочности:

**Первая теория прочности** — теория наибольших нормальных напряжений.

**Вторая теория прочности** — теория наибольших относительных линейных деформаций.

**Третья теория прочности** — теория наибольших касательных напряжений.

**Четвертая (энергетическая) теория прочности** — теория удельной потенциальной энергии формоизменения. Теория прочности О. Мора.

*Первая теория прочности* представляет собой гипотезу о том, что нарушение прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, произойдет тогда, когда наибольшее растягивающее напряжение достигнет величины опасной для данного материала при центральном растяжении — сжатии. В соответствии с этим, при расчетах на прочность ограничивается величина наибольших растягивающих напряжений, которая не должна превышать допускаемого нормального напряжения  $[\sigma]$ , устанавливаемого из опыта на осевое растяжение (центральное растяжение).

Если допускаемые напряжения для материала на растяжение и сжатие одинаковы (пластичные материалы), то условие прочности по первой теории прочности имеет вид

$$\sigma_1 \leq [\sigma]. \quad (5.1)$$

Если же допускаемые напряжения на растяжение  $[\sigma_+]$  и на сжатие  $[\sigma_-]$  различны (хрупкие материалы), то условие прочности по первой теории прочности выражается в виде

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+]. \quad (5.2)$$

Первая теория прочности дает удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными в тех случаях, когда главное напряжение  $\sigma_1$  по абсолютной величине значительно больше других. Недостаток первой теории прочности заключается в том, что она не учитывает влияние главных напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

В практических расчетах первая теория прочности в настоящее время почти не применяется.

*Вторая теория прочности* считает, что нарушение прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, произойдет тогда, когда максимальная линейная относительная деформация достигнет величины опасной для данного материала при центральном растяжении — сжатии.

Условие прочности имеет вид

$$\varepsilon_1 \leq [\varepsilon]. \quad (5.3)$$

Для сложного напряженного состояния имеем (4.21)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (5.4)$$

Для центрального растяжения—сжатия (3.8)

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}. \quad (5.5)$$

Окончательно условие прочности по второй теории прочности имеет вид

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (5.6)$$

В настоящее время эта теория прочности применяется только для расчета хрупких материалов.

*Третья теория прочности* считает, что нарушение прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, произойдет тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигнет величины опасной для данного материала при центральном растяжении—сжатии.

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (5.7)$$

Для сложного напряженного состояния имеем (4.11)

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}. \quad (5.8)$$

Для центрального растяжения—сжатия (4.5)

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (5.9)$$

Окончательно условие прочности по третьей теории прочности имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (5.10)$$

Третья теория прочности дает удовлетворительное совпадение результатов теоретического расчета с опытными данными для случая пластического состояния материала. Для расчета хрупких материалов эта теория неприменима.

Недостатком третьей теории прочности является то, что она не учитывает промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ , величина которого, как показывают опыты, влияет на прочность материала. Расхождение результатов теоретических расчетов и опытных данных из-за не учета величины  $\sigma_2$  достигает 10 – 15 %.

Несмотря на то, что третья теория прочности дает менее точные результаты, чем четвертая (энергетическая) теория прочности, она наравне с ней широко используется при расчетах конструкций из пластичных материалов.

*Четвертая теория прочности (энергетическая)* считает, что нарушение прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, произойдет тогда, когда величина удельной потенциальной энергии изменения формы (удельная потенциальная энергия формоизменения) достигнет величины опасной для данного материала при центральном растяжении — сжатии (в момент текучести).

Условие прочности по четвертой (энергетической) теории прочности имеет вид

$$u_{\Phi} \leq [u_{\Phi}]. \quad (5.11)$$

Эта теория прочности весьма хорошо согласуется с опытными данными для пластичных материалов (*для хрупких материалов она неприменима*).

Величину полной удельной потенциальной энергии  $u$  представляем состоящей из двух частей: одной части, идущей на изменение объема (так как в результате деформации изменяется объем), и другой — на изменение формы (так как в результате того, что в общем случае  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  удлинения ребер оказываются различными, поэтому изменяется и форма).

Деление полной удельной потенциальной энергии  $u$  производится по следующему принципу.

Каждое из главных напряжений представляем в виде суммы двух величин (рис. 5.2)

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1; \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \sigma'_2; \quad \sigma_3 = \sigma_0 + \sigma'_3. \quad (5.12)$$

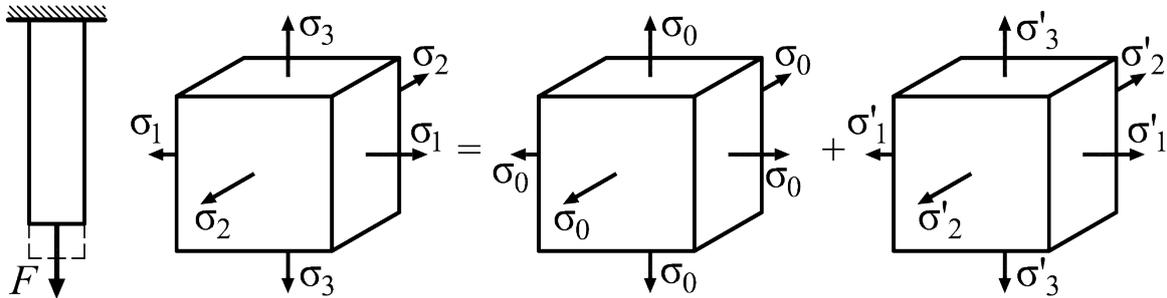


Рис. 5.2

В результате, напряженное состояние разбивается на два. Первое из них представляет центральное растяжение, а второе является дополнительным к нему до заданного напряженного состояния.

Величина  $\sigma_0$  подбирается с таким расчетом, чтобы изменение объема в дополнительном напряженном состоянии отсутствовало, то есть (4.26)

$$\theta' = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$

Так как

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0 + (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3),$$

то

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (5.13)$$

В этом случае система сил первого напряженного состояния ( $\sigma_0$ ) не производит работы на перемещениях, вызванных силами второго состояния ( $\sigma'$ ). Справедливо и обратное утверждение.

Так как взаимные работы отсутствуют, то внутренняя энергия распадается на две части, соответствующие двум напряженным состояниям

$$u = u_{об} + u_{\Phi} \quad \rightarrow \quad u_{\Phi} = u - u_{об}. \quad (5.14)$$

Полная энергия деформации, накапливаемая в единице объема материала, при одноосном напряженном состоянии равна

$$u = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}. \quad (5.15)$$

В общем случае объемного напряженного состояния при действии главных напряжений имеем

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2}. \quad (5.16)$$

Подставив выражения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  (4.21) из обобщенного закона Гука в формулу для  $u$ , после несложных преобразований получим

$$u = \frac{1}{2E} \cdot \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right]; \quad (5.17)$$

$$u_{об} = \frac{1 - 2\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Таким образом, в общем случае объемного (трехосного) напряженного состояния при действии главных напряжений

$$u_{об} = \frac{1 - 2\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (5.18)$$

$$u_{\Phi} = \frac{1 + \mu}{3E} \cdot \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right].$$

Удельную потенциальную энергию изменения объема найдем из формулы для  $u$  при центральном растяжении. Имеем

$$u_{\Phi} = \frac{(1 + \mu) \sigma^2}{3E}. \quad (5.19)$$

Условие прочности по четвертой (энергетической) теории прочности имеет вид (5.11)

$$u_{\Phi} \leq [u_{\Phi}].$$

Так как для центрального растяжения

$$u_{\Phi} = \frac{1 + \mu}{3E} \cdot \sigma^2; \quad [u_{\Phi}] = \frac{1 + \mu}{3E} \cdot [\sigma]^2,$$

то условие прочности по четвертой (энергетической) теории прочности окончательно принимает вид

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} \leq [\sigma]. \quad (5.20)$$

Новый способ проверки прочности хрупких материалов был предложен О. Мором. Его еще называют *теорией предельных напряженных состояний*.

Главное напряжение  $\sigma_2$  влияет на прочность материала незначительно (в пределах 15%). Поэтому можно считать, что прочность материала определяется лишь наибольшим  $\sigma_1$  и наименьшим  $\sigma_3$  главными напряжениями.

Таким образом, расчет прочности в общем случае объемного (трехосного) напряженного состояния сводится к расчету прочности при плоском (двухосном) напряженном состоянии.

Формула условия прочности по теории прочности О. Мора имеет вид

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_+] \cdot \sigma_3}{[\sigma_-]} \leq [\sigma_+]. \quad (5.21)$$

*Условие прочности (5.21) выражает упрощенную теорию Мора.*

Теория прочности О. Мора широко используется при расчетах конструкций из хрупких материалов. Для пластичных материалов допускаемые напряжения  $[\sigma_+]$  и  $[\sigma_-]$  на центральное растяжение и сжатие одинаковы и теория прочности Мора совпадает с третьей теорией прочности. Поэтому теорию прочности Мора иногда рассматривают как обобщение третьей теории применительно к хрупким материалам, не одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию.

Недостатком теории прочности Мора (также как и третьей теории) является пренебрежение влиянием промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ .

Таким образом, для расчета хрупких материалов следует применять теорию прочности Мора, учитывая при этом сделанные выше замечания об области ее применимости.

Для расчета пластичных материалов следует, как правило, применять четвертую теорию прочности. Допустимо применение и третьей теории прочности, так как она, хотя и менее точная, чем четвертая, но разница в результатах, получаемых по этим теориям обычно невелика.

## **5.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Теории прочности»**

1. Какие напряженные состояния называются равнопрочными или равноопасными?
2. Какое напряженное состояние принято принимать за эталон (эквивалент)?
3. Что является критерием прочности при центральном растяжении?
4. Сколько теорий прочности Вы знаете?

5. Какая гипотеза положена в основу первой теории прочности?
6. Как выглядит условие прочности по первой теории прочности?
7. В чем заключается недостаток первой теории прочности?
8. Какая гипотеза положена в основу второй теории прочности?
9. Как выглядит условие прочности по второй теории прочности?
10. Для расчета каких материалов применяется вторая теория прочности?
11. Какая гипотеза положена в основу третьей теории прочности?
12. Как выглядит условие прочности по третьей теории прочности?
13. В чем заключается недостаток третьей теории прочности?
14. Для расчета каких материалов применяется третья теория прочности?
15. Какая гипотеза положена в основу четвертой теории прочности?
16. Как выглядит условие прочности по четвертой теории прочности?
17. Для расчета каких материалов применяется четвертая теория прочности?
18. Как выглядит условие прочности по теории прочности О. Мора (теории предельных напряженных состояний)?
19. Для расчета каких материалов применяется теория прочности О. Мора (теория предельных напряженных состояний)?
20. В чем заключается недостаток теории прочности О. Мора (теории предельных напряженных состояний)?
21. Какие теории прочности применяют обычно при расчете пластичных материалов

## Тема 6. Сдвиг

### 6.1. Понятие о чистом сдвиге, как частном случае плоского напряженно-го состояния

Деформация сдвига образуется при смещении одного сечения тела относительно другого при неизменном расстоянии между ними и сопровождается возникновением касательных напряжений.

Детали, служащие для соединения отдельных элементов машин и строительных конструкций — шпильки, заклепки, болты, сварные швы, врубки и др. во многих случаях воспринимают нагрузки, перпендикулярные к их продольной оси, то есть испытывают деформацию сдвига.

**Определение 6.1** Чистым сдвигом называется такой вид плоского напряженного и деформированного состояния, при котором по четырем граням выделенного элемента в виде прямоугольного параллелепипеда, ориентированного определенным образом, действуют только касательные напряжения.

### 6.2. Деформация при сдвиге. Закон Гука при чистом сдвиге

Рассмотрим элемент, по граням которого действуют только касательные напряжения (рис. 6.1).

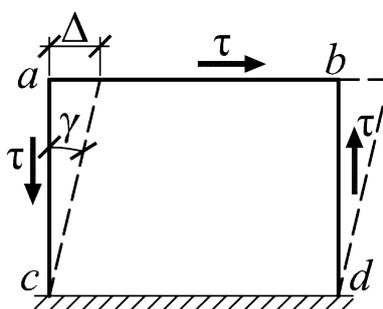


Рис. 6.1

Нижнюю грань будем считать закрепленной. Это допустимо, так как изучаются деформации элементарного параллелепипеда, а не его перемещения как твердого тела.

Напряженное состояние, изображенное на рис. 6.1, представляет собой чистый сдвиг. В результате деформации длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми гранями — первоначально прямые углы становятся равными: угол при вершине  $c$  станет равным  $\frac{\pi}{2} - \gamma$ , а угол при вершине  $a$  станет равным  $\frac{\pi}{2} + \gamma$ .

Угол  $\gamma$  является мерой искажения формы элемента при сдвиге и называется *деформацией сдвига*.

Каждая из граней элементарного параллелепипеда при деформации чистого сдвига перемещается относительно противоположной грани на величину  $\Delta$ , называемую абсолютным сдвигом.

**Определение 6.2** *Величина, на которую сместилась одна сторона относительно другой, называется абсолютным сдвигом ( $\Delta$ ).*

**Определение 6.3** *Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется относительным сдвигом.*

При малых деформациях оно равно величине угла сдвига  $\gamma$  — изменения первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда, так как

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma.$$

Абсолютный сдвиг выражается в мерах длины, а относительный сдвиг — в радианах.

Величина  $\gamma$ , как показывает опыт, прямо пропорциональна величине касательных напряжений. Эта зависимость между  $\gamma$  и  $\tau$  называется *законом Гука при сдвиге*, и выражается в виде

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{или} \quad \tau = G \cdot \gamma. \quad (6.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $G$  в формулах (6.1) называется *модулем сдвига, или модулем упругости второго рода*.

Модуль сдвига  $G$  является физической постоянной материала, характеризующей его жесткость, то есть способность сопротивляться упругим деформациям при сдвиге.

Модуль сдвига  $G$ , как и модуль упругости первого рода  $E$ , выражается в  $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ,  $\frac{\text{н}}{\text{м}^2}$  и т. д.

Деформации сдвига можно определять по формуле (??) не только при чистом сдвиге, но и в общем случае плоского напряженного состояния, когда по боковым граням параллелепипеда действуют не только касательные, но также и нормальные напряжения. Это является следствием того, что нормальные напряжения вызывают лишь поступательные перемещения боковых граней параллелепипеда и не вызывают изменения его прямых углов.

### 6.3. Зависимость между тремя упругими постоянными $E$ , $G$ и $\mu$

Чистый сдвиг — есть частный случай плоского напряженного состояния при напряжениях  $\sigma_1 = \sigma$ ; и  $\sigma_3 = -\sigma$  (рис. 6.2).

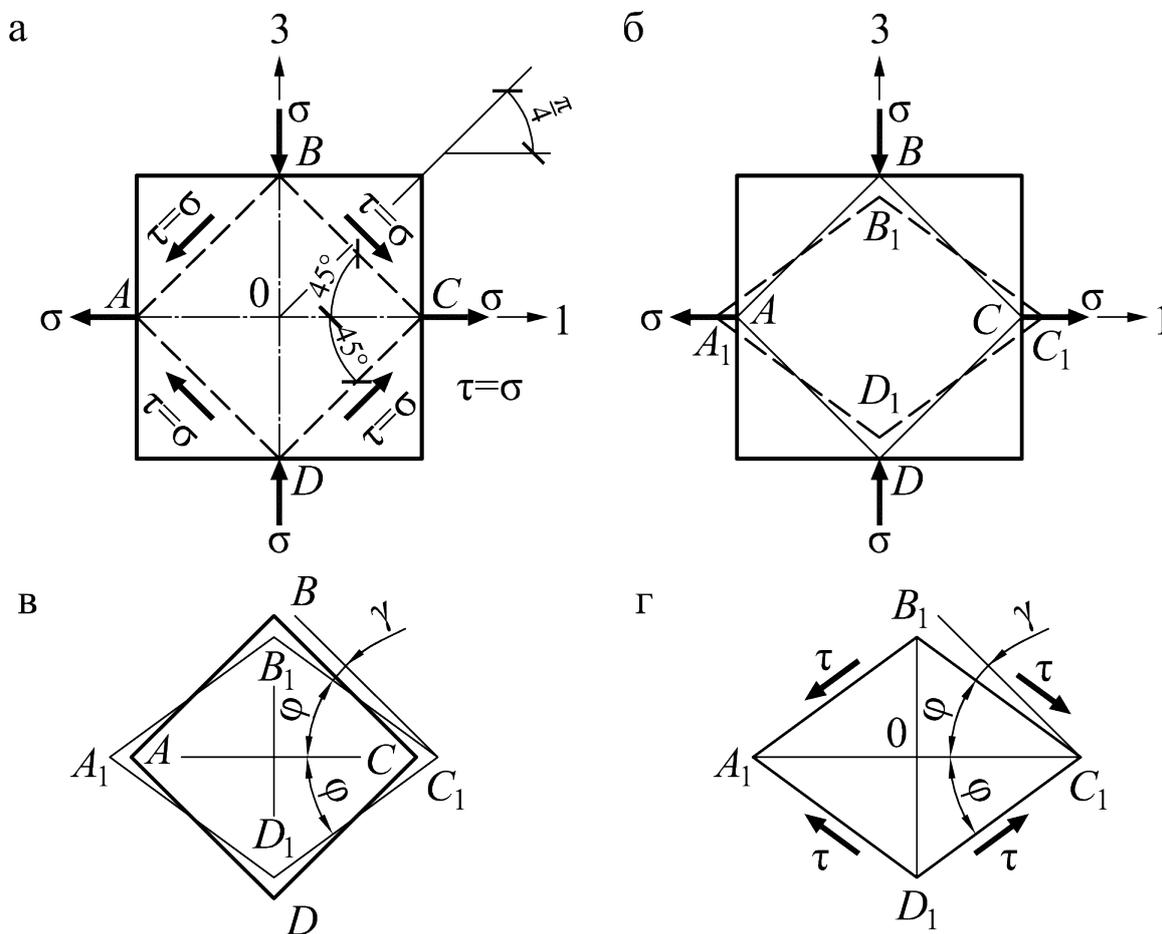


Рис. 6.2

Для плоского напряженного состояния ( $\alpha = \pi/4$ ) имеем (4.15) и (4.16)

$$\sigma_\alpha = \sigma/2 + (-\sigma)/2 = 0; \quad \tau_\alpha = [\sigma - (-\sigma)]/2 = \sigma. \quad (6.2)$$

Рассмотрим выделенный элемент (рис. 6.2,а). Диагональ  $BD$  испытывает деформацию сжатия, характеризуемое относительной линейной деформацией  $\varepsilon_3$ , а диагональ  $AC$  — удлинение, характеризуемое относительной линейной деформацией  $\varepsilon_1$  (рис. 6.2,б).

Из закона Гука для плоского напряженного состояния имеем (4.21)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2] = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \mu) = \frac{\tau}{E} (1 + \mu); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot \sigma_1] = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \mu) = \frac{-\tau}{E} (1 + \mu).\end{aligned}\quad (6.3)$$

Рассмотрим выделенный элемент после деформации (рис. 6.2,в)

$$\begin{aligned}A_1C_1 &= AC + \Delta AC = AC \cdot \left(1 + \frac{\Delta AC}{AC}\right) = AC \cdot (1 + \varepsilon_1) = AC \cdot \left(1 + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau\right); \\ B_1D_1 &= BD + \Delta BD = BD \cdot \left(1 + \frac{\Delta BD}{BD}\right) = BD \cdot (1 + \varepsilon_2) = BD \cdot \left(1 - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau\right).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}OC_1 &= \frac{A_1C_1}{2} = \frac{AC}{2} \cdot \left(1 + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau\right); \\ OB_1 &= \frac{B_1D_1}{2} = \frac{BD}{2} \cdot \left(1 - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau\right); \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{OB_1}{OC_1} = \frac{1 - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau}{1 + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau}.\end{aligned}$$

Имеем (рис. 6.2,г) для  $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{1 - (1 + \mu) \tau / E}{1 + (1 + \mu) \tau / E} = \frac{1 - \operatorname{tg}(\gamma/2)}{1 + \operatorname{tg}(\gamma/2)} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2} = \frac{1 - (1 + \mu) \tau / E}{1 + (1 + \mu) \tau / E} \rightarrow \gamma = \frac{2(1 + \mu) \tau}{E}.\end{aligned}$$

Учитывая, что закон Гука при чистом сдвиге имеет вид (6.1)

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

получим

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (6.4)$$

где  $E$  — модуль упругости первого рода (модуль Юнга);  
 $G$  — модуль упругости второго рода (модуль сдвига);  
 $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Формула (6.4) выражает зависимость между тремя упругими постоянными  $E$ ,  $G$  и  $\mu$ .

Коэффициент Пуассона  $\mu$  для различных материалов имеет значение от 0 примерно до 0.5, то есть

$$0 \leq \mu \leq 0.5.$$

Следовательно, на основании формулы (6.4) величина модуля упругости второго рода (модуля сдвига)  $G$  составляет от 0.33 до 0.5 величины модуля упругости первого рода (модуля Юнга)  $E$ .

Для большинства материалов, в том числе и для стали, можно приближенно принимать  $G \approx 0.4E$ , следовательно, для стали

$$G \approx 0.4E \approx 2.1 \cdot 10^6 \cdot 0.4 \approx 0.8 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$$

#### 6.4. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Сдвиг»

1. Какой вид деформации называется чистым сдвигом?
2. Какое перемещение называется абсолютным сдвигом?
3. Какая величина называется относительным сдвигом?
4. Как читается закон Гука при сдвиге?
5. Какой формулой выражается закон Гука при сдвиге?
6. Какая величина называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода?
7. От чего зависят значения модуля сдвига?
8. В каких единицах измеряется модуль сдвига?
9. Какое выражение показывает зависимость между тремя упругими постоянными  $E$ ,  $G$  и  $\mu$ ?

## Тема 7. Кручение

### 7.1. Основные понятия. Крутящий момент

**Определение 7.1** *Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только одно внутреннее усилие — крутящий момент  $M_K$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $N$ ,  $Q$  и  $M_{изг}$ ) равны нулю.*

Таким образом, кручение — это такая деформация, которая сопровождается поворотом поперечных сечений стержня вокруг некоторой оси при неизменном расстоянии точек этих сечений от названной оси. Если сечения стержня имеют две оси симметрии, то за ось вращения принимается геометрическая ось стержня. Такая деформация, в частности, имеет место в том случае, когда к концам стержня приложены силы, которые сводятся к противоположно направленным парам сил, действующим в плоскостях концевых поперечных сечений и имеющим равные моменты.

С кручением на практике приходится встречаться достаточно часто: оси подвижного состава, трансмиссионные валы, винтовые пружины, элементы пространственных конструкций и обыкновенный замочный ключ — все это примеры стержней, работающих на кручение.

Исследования показали, что характер деформации скручиваемого стержня в значительной степени зависит от формы его поперечного сечения. Среди стержней с различными формами поперечных сечений, подвергаемых кручению, наибольшее распространение получили стержни с круглым или кольцевым сечением.

**Определение 7.2** *Стержни, работающие на кручение, называются валами.*

Если прямой стержень находится в состоянии покоя или равномерного вращения, то алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к стержню, равна нулю.

$$\sum M_{(x)} = 0.$$

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала, определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений.

**Определение 7.3** *Крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения.*

В простейшем случае, когда стержень нагружен только двумя равными друг другу по величине и направленными в противоположные стороны внешними моментами, крутящий момент в любом поперечном сечении стержня по величине равен внешнему моменту.

В более сложных случаях, когда к стержню приложено несколько внешних моментов, крутящие моменты в поперечных сечениях различных участков будут неодинаковы.

Изменение крутящих моментов по длине стержня изображают графически в виде эпюр крутящих моментов.

**Определение 7.4** *График, изображающий закон изменения  $M_k$  вдоль геометрической оси стержня, называется эпюрой крутящих моментов.*

*Ординаты этой эпюры представляют собой численные значения крутящих моментов  $M_k$  в соответствующих сечениях стержня.*

Правила построения этих эпюр  $M_k$  принципиально ничем не отличаются от построения эпюр других внутренних усилий.

При расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента не имеет особого значения, но для удобства построения эпюр  $M_k$  обычно принимают следующее правило знаков.

Правило знаков. *Крутящий момент в рассматриваемом сечении стержня считается положительным, если при взгляде со стороны проведенного сечения внешний момент направлен против хода часовой стрелки.*

## 7.2. Определение крутящих моментов по мощности « $N$ » и числу оборотов вала « $n$ »

При расчете валов на прочность обычно задается не крутящий момент, а мощность  $N$ , передаваемая валом, и число оборотов вала  $n$ .

Выведем формулу для определения крутящего момента по заданной мощности  $N$  и числу оборотов вала  $n$ .

Из механики нам известно, что мощность вращающего момента равна моменту, умноженному на угловую скорость  $\omega$ , то есть

$$W = M_k \cdot \omega = M_k \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right]$$

С другой стороны, если мощность  $N$  задана в лошадиных силах (1 л. с =  $75 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ ), то

$$W = 75 \cdot N \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right].$$

Следовательно,

$$M_k \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = 75 \cdot N.$$

Откуда

$$M_k = \frac{30 \cdot 75 \cdot N}{\pi \cdot n} = 716.2 \cdot \frac{N}{n} [\text{кг} \cdot \text{м}].$$

или

$$M_k = 71620 \cdot \frac{N}{n} [\text{кг} \cdot \text{см}], \quad (7.1)$$

где  $N$  — мощность, передаваемая валом, в л. с.;

$n$  — число оборотов вала, в об/мин.

Если мощность  $N$  задана в киловаттах (1 кВт  $\approx$  1.36 л. с.), то

$$M_k = 71620 \cdot 1.36 \cdot \frac{N}{n} = 97360 \cdot \frac{N}{n} [\text{кг} \cdot \text{см}], \quad (7.2)$$

где  $N$  — мощность, передаваемая валом, в кВт;

$n$  — число оборотов вала, в об/мин.

Полученные формулы показывают, что скручивающий момент тем меньше, чем больше число оборотов вала. Следовательно, при применении быстроходной машины, делающей большое число оборотов, нагрузка на вал

при одной и той же мощности получается меньше, чем в тихоходной машине, поэтому диаметр вала, а, следовательно, и размеры машины при больших числах оборотов уменьшаются. Это объясняется тем, что при работе с большим числом оборотов увеличивается путь, на котором производится работа, а потому получается экономия в силе. На этом основывается выгода применения быстроходных машин.

### 7.3. Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого поперечного сечения

При выводе формул для определения напряжений и угла закручивания при кручении вала круглого сечения предполагаем, что материал работает в пределах пропорциональности, то есть выполняется закон Гука.

Анализируя напряженное состояние стержней при кручении необходимо исходить из действующих в нем внутренних усилий.

В рассматриваемом случае в сечении вала возникает единственный силовой фактор — крутящий момент  $M_k$  (рис. 7.1), так как, согласно определению,  $N = Q_y = Q_z = 0$ ;  $M_y = M_z = 0$ .

Составим уравнение равновесия (статики)

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_k - \int_A \tau \cdot \rho dA = 0.$$

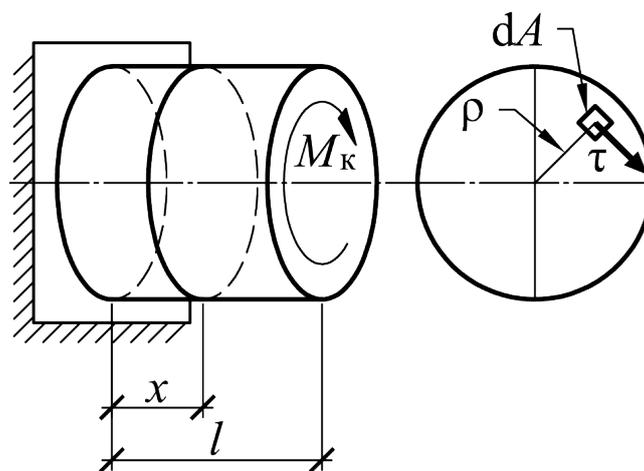


Рис. 7.1

Откуда

$$M_k = \int_A \tau \cdot \rho dA, \quad (7.3)$$

где  $\tau$  — касательное напряжение, действующее в элементарной площадке  $dA$ , расположенной на расстоянии  $\rho$  от центра тяжести сечения.

Проведем опыт на закручивание стержня. Предварительно нанесем на вал сетку, состоящей из линий параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги (рис. ??).

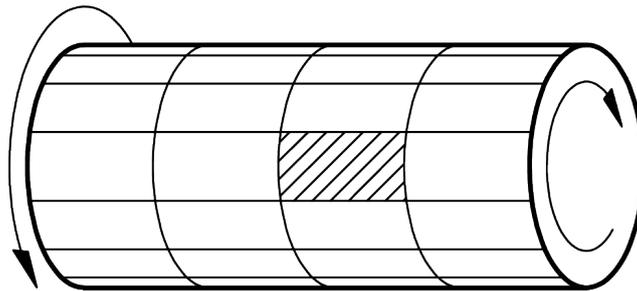


Рис. 7.2

Для выяснения характера распределения напряжений по сечению рассмотрим картину деформации вала при кручении.

Как показывают эксперименты, после закручивания прямоугольники, образованные сеткой, перекашиваются. Контуры поперечных сечений (параллельных кругов) не искривляются и расстояния между ними не изменяются, а ось стержня остается прямолинейной. Радиусы, проведенные в торцевых сечениях вала, остаются прямыми.

Так как расстояния между поперечными сечениями практически не меняются, то это означает, что продольные волокна не удлиняются и не укорачиваются.

При кручении происходит поворот одного сечения относительно другого на некоторый угол  $\varphi$ , называемый *углом закручивания*.

Это свидетельствует о том, что при кручении возникает деформация чистого сдвига.

На основании этих экспериментальных данных строится теория кручения круглых стержней, в основу которой положена гипотеза плоских сечений.

Предположим, что:

— поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его продольной оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации (гипотеза плоских сечений);

— радиусы поперечных сечений при деформации не искривляются и сохраняют свою длину;

— расстояния (вдоль оси стержня) между поперечными сечениями стержня при деформации не изменяются, то есть длина стержня остается прежней;

— прямолинейная ось стержня (ось кручения) остается прямолинейной и после деформации, а все поперечные сечения стержня поворачиваются вокруг этой оси по отношению друг к другу на угол  $\varphi$ .

Справедливость принятых гипотез подтверждается тем, что полученные на их основе формулы хорошо согласуются с экспериментальными данными.

На основании принятых допущений кручение круглых стержней можно представить как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом поперечных сечений относительно друг друга.

Вследствие этого в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения  $\tau$ , а нормальные напряжения  $\sigma$  равны нулю.

Двумя поперечными сечениями выделим из рассматриваемого бруса, подверженного деформации кручения, участок длиной  $dx$  и рассмотрим его деформацию.

Выделим элементарный объем наружного слоя (рис. 7.3)

Смещения точек  $A$  и  $B$  равны

$$AA_1 = r \cdot (\varphi + d\varphi); \quad BB_1 = r \cdot \varphi \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{r \cdot (\varphi + d\varphi) - r \cdot \varphi}{dx} = r \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Будем считать стержень жестким, углы поворота малыми, поэтому

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma.$$

Следовательно,

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}. \quad (7.4)$$

Выделенный элемент испытывает деформацию чистого сдвига (рис. 7.4).

Закон Гука при чистом сдвиге имеет вид (6.1)

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \rightarrow \quad \tau = \gamma \cdot G.$$

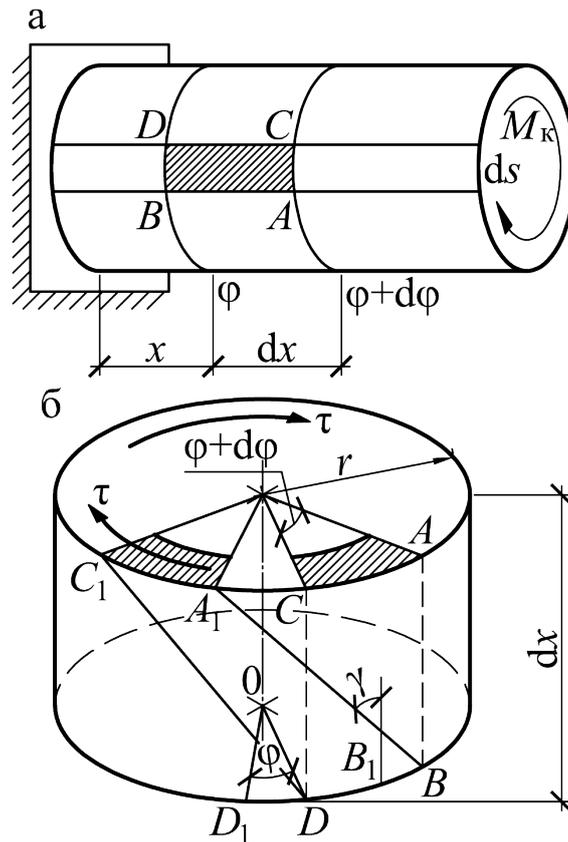


Рис. 7.3

Или с учетом (7.3)

$$\tau = \left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot r.$$

Так как при закручивании поперечные сечения вала остаются плоскими, а радиусы прямыми, то выражения для угла сдвига и касательных напряжений в сечении на расстоянии  $\rho$  от центра его можно представить в виде

$$\gamma_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}; \quad \tau_\rho = \left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \rho. \quad (7.5)$$

Таким образом, касательные напряжения  $\tau_\rho$  в поперечном сечении вала изменяется по линейному закону.

Подставив выражение (7.5) в уравнение (7.3), получим

$$M_k = \left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \int_A \rho^2 dA = \left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot I_\rho$$

или

$$\left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{M_k}{I_\rho}. \quad (7.6)$$

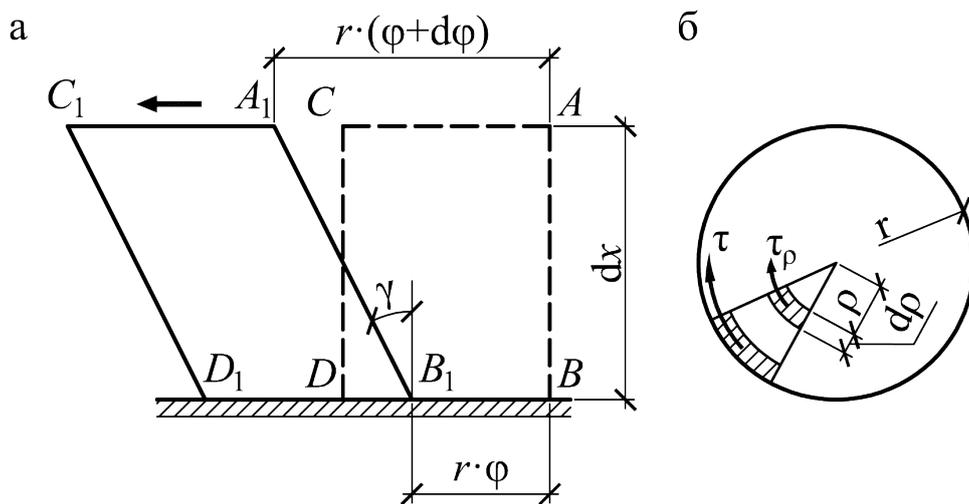


Рис. 7.4

Следовательно, подставив выражение (7.6) в уравнение (7.5), получим

$$\tau_{\rho} = \tau = \frac{M_{\text{к}} \cdot \rho}{I_{\rho}}. \quad (7.7)$$

Эта формула позволяет определять касательные напряжения в любой точке круглого поперечного сечения с координатой  $\rho$ .

Максимальные значения касательных напряжений возникают в крайних точках сечения  $\rho = r$  и определяются по формуле

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{(\rho=r)} = \frac{M_{\text{к}} \cdot r}{I_{\rho}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\rho}}, \quad (7.8)$$

где  $I_{\rho}$  — полярный момент инерции площади круга относительно его центра;

$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{r}$  — полярный момент сопротивления площади круга относительно его центра.

Как известно, для круга

$$W_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (7.9)$$

Для определения угла закручивания  $\varphi$  воспользуемся уравнением (7.6)

$$G \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\text{к}}}{I_{\rho}} \rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\text{к}}}{G \cdot I_{\rho}} \rightarrow d\varphi = \frac{M_{\text{к}}}{G \cdot I_{\rho}} \cdot dx. \quad (7.10)$$

После интегрирования получим полный взаимный угол закручивания двух сечений на рассматриваемом участке, где  $M_k = \text{const}$  и  $d = \text{const}$ .

$$\varphi = \frac{M_k}{GI_\rho} \cdot \int_0^l dx = \frac{M_k \cdot l}{GI_\rho} [\text{рад}]. \quad (7.11)$$

**Определение 7.5** Произведение  $G \cdot I_\rho$  (модуля сдвига на полярный момент инерции поперечного сечения) называют жесткостью стержня при кручении.

Жесткость стержня при кручении характеризует сопротивление стержня закручиванию.

Полный угол закручивания не всегда может характеризовать жесткость стержня при кручении. На протяжении длины стержня крутящие моменты могут иметь разные знаки, поэтому полный угол закручивания может быть небольшим, в то время как на отдельных участках он окажется значительным.

Для объективной оценки жесткости стержня вводится другая величина — относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (7.12)$$

или с учетом (7.11)

$$\theta = \frac{M_k}{GI_\rho}, \quad (7.13)$$

имеющая размерность рад/см или рад/м.

Таким образом, для случаев, когда на отдельных участках величина  $M_k$  постоянная, относительный угол закручивания  $\theta$  на рассматриваемом участке численно равен углу закручивания вала, приходящегося на единицу длины.

#### 7.4. Расчет стержня круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении

Наиболее распространенным расчетом на прочность при кручении является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому наибольшее касательное напряжение, возникающее в материале, не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы.

Эта величина называется допускаемым напряжением, то есть

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (7.14)$$

Это требование называется *условием прочности*.

**Определение 7.6** *Допускаемым напряжением называется наибольшее напряжение, при котором обеспечивается прочность и долговечность проектируемого элемента конструкции.*

Допускаемое касательное напряжение при кручении  $[\tau]$ , зависит от свойств материала и от принятого коэффициента запаса прочности

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[K]}. \quad (7.15)$$

В случае пластичного материала в качестве опасного напряжения  $\tau_{\text{пред}}$  принимается  $\tau_T$  — предел текучести при сдвиге, а в случае хрупкого материала  $\tau_B$  — предел прочности при сдвиге.

В большинстве случаев допускаемые напряжения на кручение принимаются в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для того же материала.

Валы, являющиеся основными объектами, рассчитываемыми на кручение, кроме кручения, часто испытывают и изгиб. Кроме того, возникающие в них напряжения переменны во времени. Поэтому, рассчитывая вал только на кручение статической нагрузкой без учета изгиба и переменности напряжений, необходимо принимать пониженные значения допускаемых напряжений  $[\tau]$ .

Величины допускаемых напряжений устанавливаются СП (Сводом правил).

Максимальное касательное напряжение в вале при кручении возникает в сечении, где крутящий момент  $M_K$  достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

**Определение 7.7** *Сечение, в котором крутящий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение  $M_{\max}$ , называется опасным сечением стержня по касательным напряжениям при кручении.*

Величина  $\tau_{\max}$  представляет собой значение наибольшего касательного напряжения в опасном сечении стержня в непосредственной близости к его внешней поверхности ( $\rho = r$ ).

Таким образом, наибольшие касательные напряжения в стержне при кручении будут возникать в опасных точках опасного сечения вала

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}^{\max}}{W_{\rho}}. \quad (7.16)$$

Следовательно, условие прочности при кручении по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}^{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (7.17)$$

где  $\tau_{\max}$  — максимальное касательное напряжение в вале;

$M_{\text{к}}^{\max}$  — максимальный крутящий момент в вале;

$W_{\rho}$  — полярный момент сопротивления поперечного сечения вала;

$[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение.

При расчете скручиваемых стержней на прочность возможны три вида задач, различающихся формой использования условия прочности:

а) Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют крутящий момент  $M_{\text{к}}^{\max}$  и из условия прочности находят величину требуемого полярного момента сопротивления поперечного сечения

$$W_{\rho}^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\text{к}}^{\max}}{[\tau]}. \quad (7.18)$$

По величине полярного момента сопротивления определяется диаметр сплошного круглого поперечного сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{к}}}{\pi[\tau]}},$$

или наружный  $d_{\text{н}}$  и внутренний  $d_{\text{в}}$  диаметры кольцевого сечения стержня

$$d_{\text{н}} \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{к}}}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} \cdot \alpha = \frac{d_{\text{в}}}{d_{\text{н}}} \rightarrow d_{\text{в}} = \alpha \cdot d_{\text{н}}.$$

б) Определение допускаемой нагрузки. Решение этой задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям). По известной величине полярного момента сопротивления  $W_{\rho}$  и допускаемому напряжению  $[\tau]$  определяют наибольшую

величину допускаемого крутящего момента  $M_K^{\max}$

$$[M_K] \leq [\tau] \cdot W_\rho. \quad (7.19)$$

По найденному значению  $[M_K]$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в) Проверочный расчет. По известным значениям  $M_K^{\max}$ ,  $W_\rho$  и  $[\tau]$  проверяют выполнение условия прочности (7.17)

$$\tau_{\max} = \frac{M_K^{\max}}{W_\rho} \leq [\tau].$$

При проверке напряжений по заданным нагрузкам и размерам стержня определяют наибольшие касательные напряжения. Наибольшие касательные напряжения сравниваются с допускаемым напряжением.

Если условие прочности не выполняется, то необходимо увеличить размеры сечения или уменьшить нагрузку.

Расчет вала на прочность не исключает возможности возникновения деформаций, недопустимых при его эксплуатации. Большие углы закручивания вала особенно опасны при передаче им переменного во времени момента, так как при этом возникают опасные для его прочности крутильные колебания.

Поэтому в необходимых случаях валы рассчитывают и на жесткость.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{M_K}{GI_\rho} \leq [\theta]. \quad (7.20)$$

По величине полярного момента инерции определяется диаметр сплошного круглого поперечного сечения

$$\theta_{\max} = \frac{M_K}{GI_\rho} \leq [\theta] \quad \rightarrow \quad I_\rho \geq \frac{M_K}{G[\theta]} \quad \rightarrow \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{\pi G[\theta]}}$$

или наружный  $d_H$  и внутренний  $d_B$  диаметры кольцевого сечения стержня

$$d_H \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}}; \quad \alpha = \frac{d_B}{d_H} \quad \rightarrow \quad d_B = \alpha \cdot d_H,$$

где  $\theta$  — наибольший относительный угол закручивания стержня;

$[\theta]$  — допускаемый относительный угол закручивания, принимаемый в диапазоне 0.5–2 градуса на один метр длины стержня.

*На практике обычно производят расчет на прочность, а затем делают проверку выполнения условия жесткости.*

Если при проверке окажется, что условие жесткости удовлетворяется, то на этом обычно расчет вала заканчивается.

В противном случае размеры вала должны быть подобраны из условия жесткости (7.20).

$$I_{\text{треб}} \geq \frac{M_k}{G \cdot [\theta]}. \quad (7.21)$$

## **7.5. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Кручение»**

1. Какой вид деформации называется кручением?
2. Чему равен крутящий момент в поперечном сечении вала?
3. Правило знаков для крутящего момента?
4. Что называется эпюрой крутящего момента?
5. Какая зависимость между крутящим моментом, мощностью, передаваемой валом, и числом оборотов вала?
6. Какие предположения (гипотезы) лежат в основе теории кручения стержня круглого сечения?
7. По какой формуле определяются максимальные касательные напряжения стержня круглого сечения?
8. В каких точках круглого вала возникают наибольшие напряжения при кручении?
9. Как определяется опасное сечение при кручении стержня круглого сечения?
10. Как распределяются касательные напряжения по поперечному сечению вала?
11. Напишите условие прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при кручении стержня круглого сечения.
12. Какие три типа задач вытекают из условия прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при кручении стержня круглого сечения?
13. Какой угол называется полным углом закручивания?

14. По какой формуле определяется полный угол закручивания?
15. Какая величина называется жесткостью стержня при кручении?

## Тема 8. Изгиб прямолинейных брусьев

### 8.1. Чистый и плоский поперечный изгибы. Основные определения и понятия

В строительных конструкциях широко применяются элементы, работающие на изгиб. Характерным признаком изгиба является изменение кривизны продольной оси бруса.

При изгибе первоначально прямая его ось стержня искривляется, а первоначально кривая изменяет свою кривизну.

**Определение 8.1** *Прямой брус (стержень), работающий на изгиб, называется балкой.*

**Определение 8.2** *Продольная (геометрическая) ось балки — это линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений балки.*

**Определение 8.3** *Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.*

При изгибе балки продольные волокна, находящиеся на выпуклой части, растягиваются, а находящиеся на вогнутой части — сжимаются. Слой промежуточных волокон, которые, искривляясь, не изменяют своей длины, называется *нейтральным слоем*.

**Определение 8.4** *Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется нейтральной линией или нейтральной осью (нулевой линией).*

**Определение 8.5** *Чистым изгибом называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только изгибающий момент  $M_{изг}$ , а остальные внутренние усилия ( $N$ ,  $Q$  и  $M_K$ ) равны нулю.*

В условиях чистого изгиба может находиться вся балка или отдельные ее участки.

При действии на балку системы внешних сил, расположенных в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения балки, и перпендикулярных к ее продольной оси, в каждом ее сечении могут возникать две внутренние силы — изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ .

Эта плоскость называется *силовой плоскостью*.

**Определение 8.6** *Плоским поперечным изгибом называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают одновременно изгибающий момент  $M_{изг}$  и поперечная сила  $Q$ , а остальные внутренние усилия ( $N$  и  $M_k$ ) равны нулю.*

**Определение 8.7** *Рамой называется геометрически неизменяемая стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой.*

Некоторые узлы могут быть шарнирными или, в общем случае, упруго-податливыми. В жестких узлах взаимный поворот примыкающих стержней исключается как до деформаций, так и после деформаций, то есть в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

**Определение 8.8** *Вертикальные элементы рамы называются стойками, а горизонтальные или близкие к горизонтальному расположению элементы рамы называются ригелями. Точки соединения стоек и ригелей рамы называются узлами.*

Различают рамы пространственные и плоские. У *плоской* рамы все геометрические оси ее элементов лежат в одной плоскости, которая совпадает с плоскостью нагрузки и является главной плоскостью для всех элементов рамы.

## 8.2. Основные типы опор и балок

Для того чтобы балка (рама) могла воспринимать внешнюю нагрузку и передавать ее на основание, она должна быть соединена с ним опорными связями (опорами).

Как известно, существует три основных типа опорных устройств (в плоской системе сил):

— Защемление или заделка (рис. 8.1)



Рис. 8.1. Защемление или заделка

— Цилиндрическая шарнирно–неподвижная опора (рис. 8.2)

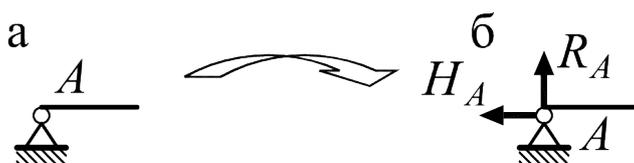


Рис. 8.2. Шарнирно–неподвижная опора

— Цилиндрическая шарнирно–подвижная опора (рис. 8.3)



Рис. 8.3. Шарнирно–подвижная опора

*Наименьшее число связей, не позволяющих балке (раме) перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.*

Рассмотрим различные типы простейших балок, в зависимости от способа их закрепления (рис. 8.4):

- Консольная или жестко защемленная балка.
- Однопролетная шарнирно–опертая балка на двух опорах.
- Консольная шарнирно–опертая балка.
- Многопролетная балка (балка с промежуточным шарниром).

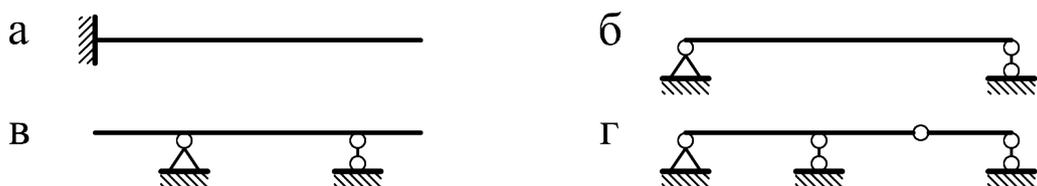


Рис. 8.4. Основные типы простейших балок

Балки с промежуточным шарниром представляют собой сложную систему, состоящую из нескольких брусьев, соединенных между собой связями, позволяющими поворот сечений брусьев в соединении (в шарнире).

Поэтому, в промежуточном шарнире возникают только вертикальные и горизонтальные реактивные силы, а момент равен нулю.

### 8.3. Основные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб балок

Деформацию изгиба вызывают внешние нагрузки, действующие перпендикулярно к оси стержня.

На рис. 8.5 показаны различные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб:

- а) Сосредоточенная сила.
- б) Сосредоточенная пара сил с моментом  $m$  (кратко — сосредоточенный момент);
- в) Равномерно–распределенная нагрузка;
- г) Неравномерно — распределенная нагрузка.

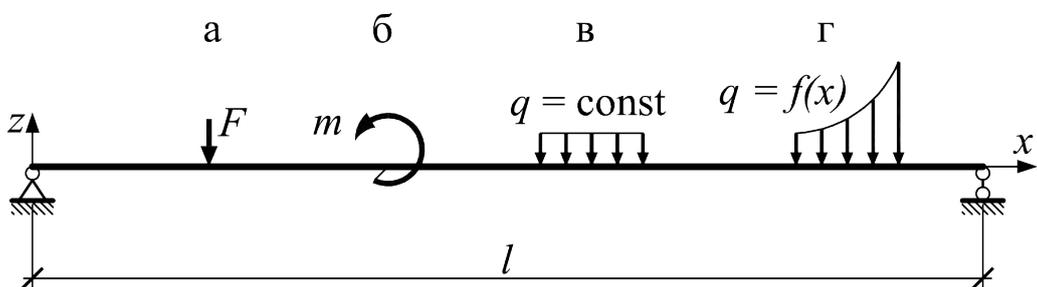


Рис. 8.5. Основные виды внешних нагрузок

В зависимости от способа приложения внешних нагрузок различают разные виды изгибов (рис. 8.6):

— *плоский изгиб* — все внешние нагрузки расположены в одной плоскости (рис. 8.6, а);

— *пространственный изгиб* — нагрузки расположены в разных плоскостях (рис. 8.6, б).

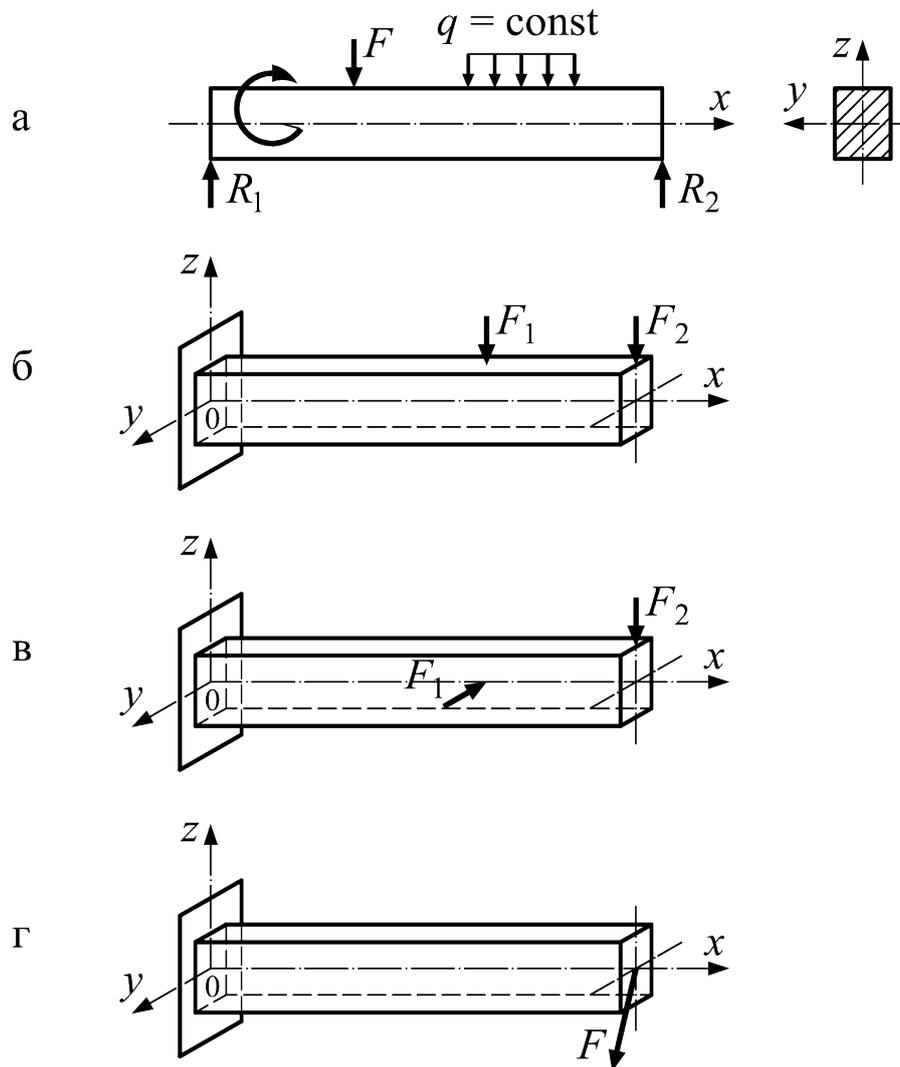


Рис. 8.6. Способы приложения внешних нагрузок

Если плоскость действия нагрузок (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей сечения, то такой изгиб называется *плоским прямым изгибом* (рис. 8.6, в).

Если плоскость действия нагрузок не проходит ни через одну из главных центральных осей сечения, то такой изгиб называется *плоским косым изгибом* (рис. 8.6, г).

#### 8.4. Определение опорных реакций в балках и рамах

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах любой конструкции, необходимо найти все действующие на нее нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных комбинациях:

а) Первая комбинация:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \text{ — сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum F_z = 0 & \text{ — сумма проекций всех сил на} \\ & \text{вертикальную ось } z \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & \text{ — сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю.}\end{aligned}\tag{8.1}$$

Уравнение  $\sum M_B = 0$  (сумма моментов всех сил относительно точки  $B$  равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

б) Вторая комбинация:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \text{ — сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & \text{ — сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю.} \\ \sum M_B = 0 & \text{ — сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } B \text{ равна нулю.}\end{aligned}\tag{8.2}$$

Уравнение  $\sum F_z = 0$  (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

Уравнения равновесия нужно составлять так, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная опорная реакция. Это облегчит нахождение опорных реакций.

Все неизвестные опорные реакции в многопролетных балках, имеющих промежуточный шарнир, можно определить двумя способами:

1. Метод моментной точки (способ, учитывающий свойство промежуточного шарнира).

В этом случае необходимо записать три уравнения равновесия для всей балки и к ним добавить дополнительные уравнения, отражающие свойство промежуточного шарнира, то есть, сумма моментов всех сил, расположенных слева (справа) от промежуточных шарниров, относительно шарнира равна нулю (рис. 8.7):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \text{ — сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & \text{ — сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю.} \\ \sum M_D = 0 & \text{ — сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } D \text{ равна нулю.} \end{aligned} \quad (8.3)$$

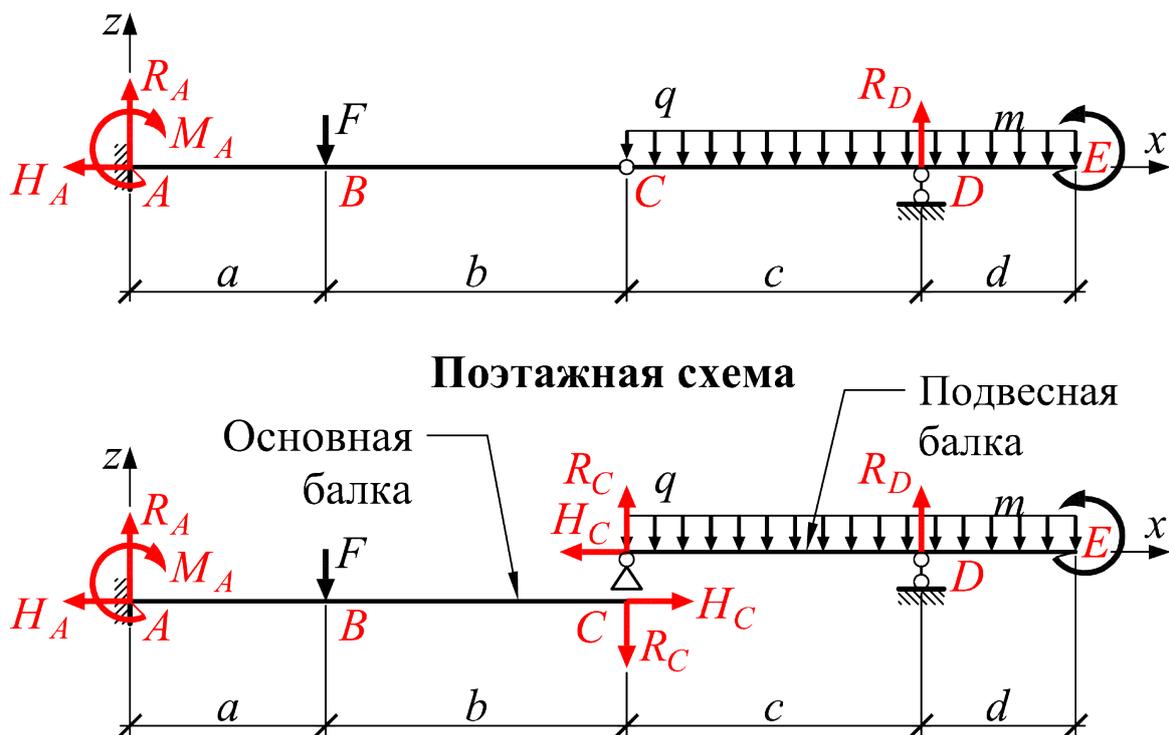


Рис. 8.7. Заданная балка и ее «позтажная» схема

$\sum M_C^{\text{левых сил}} = 0$  или  $\sum M_C^{\text{правых сил}} = 0$  — Сумма моментов всех сил, расположенных слева (справа) от промежуточных шарниров, относительно шарнира равна нулю.

Уравнение  $\sum F_z = 0$  (Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

## 2. Метод построения «поэтажной» схемы балки.

Для удобства расчета и наглядности представления о характере работы отдельных частей многопролетной балки строится ее «поэтажная» схема.

В этом случае заданную балку мысленно разрезают по промежуточному шарниру (промежуточным шарнирам) и выделяют основную балку (их может быть одна или несколько) и подвесные балки (рис. 8.7).

При этом вначале выделяют основные балки, то есть те, которые способны самостоятельно нести нагрузку, а затем вспомогательные, которые имеют только одну опору или не имеют их вовсе. Недостающими опорами для них служат соединительные шарниры.

Таким образом, основными или главными является те балки, которые могут самостоятельно сопротивляться приложенным внешним силам (нести внешнюю нагрузку) после разрезания заданной балки по промежуточным шарнирам, так как они имеют три кинематические связи (балка  $ABC$  на рис. 8.7).

Остальные балки называются подвесными или второстепенными (балка  $CDE$  на рис. 8.7).

После построения «поэтажной» схемы, заданную балку с промежуточными шарнирами, можно рассматривать как состоящую из ряда простых балок.

Затем рассчитывают каждую простую балку в отдельности.

Расчет простых балок производят, начиная с самых верхних подвесных и последовательно переходя к ниже лежащим балкам.

Расчет простых балок сводится к определению опорных реакций и построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

При расчете ниже лежащих балок необходимо учитывать не только заданную внешнюю нагрузку, которая к ним приложена, но и силы, равные по величине опорным реакциям выше лежащих подвесных балок и противоположно направленные (рис. 8.7).

Таким образом, передача нагрузки с верхних подвесных балок на ниже лежащие осуществляется с помощью условных сосредоточенных сил в промежуточных шарнирах. Эти силы численно равны соответствующим условным опорным реакциям в подвесных балках (рис. 8.7).

Составляя уравнения равновесия (статики), обычно используют правило знаков, показанное на рис. 8.8.

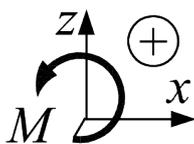


Рис. 8.8. Правила знаков

Правило знаков. Горизонтальные и вертикальные силы положительны, если их направления совпадают с направлениями осей  $x$  и  $z$ .

Положительное направление моментов — против хода часовой стрелки.

**Определение 8.9** Балки (рамы), у которых все опорные реакции могут быть определены только из уравнений равновесия (статики), называются статически определимыми.

## 8.5. Внутренние силовые факторы при изгибе. Основные определения и правила знаков

Ранее было установлено, что при действии на балку внешней нагрузки, перпендикулярной к геометрической оси балки и расположенной в одной из главных плоскостей инерции каждого поперечного сечения балки, в ее сечениях, в общем случае, возникают изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ .

Внутренние силы, возникающие в любом поперечном сечении стержня (элемента) плоской рамы, в общем случае приводятся к трем внутренним силовым факторам: продольной силе  $N$ , поперечной силе  $Q$  и изгибающему моменту  $M$ .

Внутренние силовые факторы определяются через внешние силы, действующие на балку (раму), с помощью метода сечений, применение которого позволяет сформулировать общие правила для нахождения указанных внутренних усилий на каждом участке балки (рамы).

**Определение 8.10** Участком называется часть балки (рамы), в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия постоянен.

Границами участка являются точки приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, точки начала и конца распределенной нагрузки.

Суть метода сечений сводится к следующему:

1. Мысленно проводим поперечное сечение, которое разбивает балку (раму) на две части.

2. Выбираем ту часть балки (рамы), на которую действуют известные нагрузки (наименьшее число известных нагрузок).

3. Составляем выражения для изгибающего момента  $M$ , поперечной силы  $Q$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

**Определение 8.11** *Изгибающий момент  $M$  в произвольном поперечном сечении балки (рамы) численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от проведенного сечения, относительно нейтральной оси этого поперечного сечения (или относительно той точки продольной оси балки (рамы), через которую проходит рассматриваемое сечение).*

**Определение 8.12** *Поперечная сила  $Q$  в произвольном поперечном сечении балки (рамы) численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на ось, перпендикулярную к геометрической оси балки (рамы).*

**Определение 8.13** *Продольная сила  $N$  в произвольном поперечном сечении балки (рамы) численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на геометрическую ось рассматриваемого элемента балки (рамы).*

## **8.6. Правила знаков внутренних силовых факторов для балок**

Правило знаков. Изгибающий момент  $M$  в поперечном сечении балки положителен ( $M = +M^{\text{внеш}}$ ), если момент внешней силы ( $M^{\text{внеш}}$ ) направлен по ходу часовой стрелки — от сечения слева, и против хода часовой стрелки — от сечения справа (рис. 8.9),

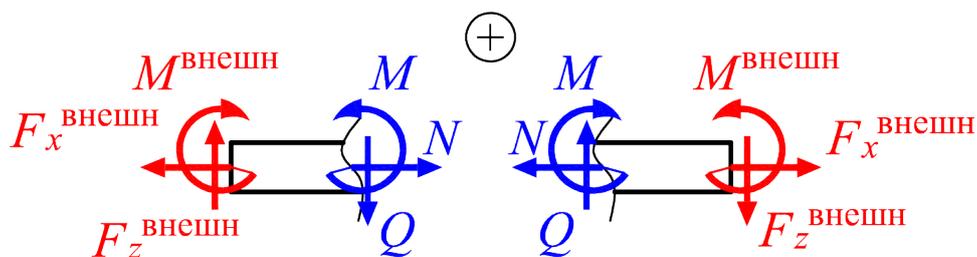


Рис. 8.9. Правило знаков

или *изгибающий момент  $M$  считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки* (рис. 8.10).

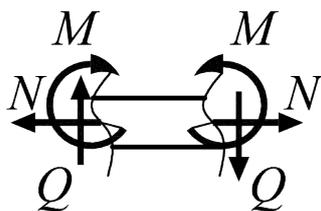


Рис. 8.10. Положительные направления внутренних силовых факторов для балок

**Правило знаков.** Поперечная сила  $Q$  в поперечном сечении балки положительная ( $Q = +F_z^{\text{внешн}}$ ), если внешняя сила ( $F_z^{\text{внешн}}$ ) направлена вверх — от сечения слева и вниз — от сечения справа (рис. 8.9), или *поперечная сила  $Q$  считается положительной, если внешние силы стремятся вращать рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести проведенного сечения по ходу часовой стрелки* (рис. 8.10).

**Правило знаков.** Продольная сила  $N$  в поперечном сечении балки положительная ( $N = +F_x^{\text{внешн}}$ ), если внешняя сила ( $F_x^{\text{внешн}}$ ) направлена влево — от сечения слева и вправо — от сечения справа (рис. 8.9), или *продольная сила  $N$  считается положительной, если она вызывает растяжение (удлинение) рассматриваемой части балки* (рис. 8.10).

**Вывод.** *Изгибающий момент  $M$  в поперечном сечении балки считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки, поперечная сила  $Q$  считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, продольная сила  $N$  считается положительной, если она вызывает растяжение рассматриваемой части балки.*

Положительные направления этих силовых факторов показаны на рис. 8.10.

Изгибающий момент, поперечная и продольная силы для балок отрицательны, если направления этих силовых факторов противоположны направлениям, указанным на рис. 8.10.

### 8.7. Правила знаков внутренних силовых факторов для рам

Правила знаков внутренних силовых факторов (продольной силы  $N$ , поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ ) для горизонтальных участков рамы (ригелей) остаются такими же, что и для балок.

Для получения правила знаков внутренних силовых факторов для вертикальных участков рамы (стоек) сведем их к горизонтальным путем условного поворота рамы (стоек) по ходу часовой стрелки.

Таким образом, при определении внутренних силовых факторов в стойках и ригелях рамы будем пользоваться следующими правилами знаков:

1. изгибающий момент  $M$  считается положительным, если он вызывает растяжение *нижних* волокон ригелей рамы и *правых* волокон стоек рамы;

2. поперечная сила  $Q$  считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы (стойки и ригели) по ходу часовой стрелки;

3. продольная сила  $N$  считается положительной, если она вызывает растяжение рассматриваемой части рамы (стоек и ригелей).

Положительные направления внутренних силовых факторов для элементов рамы (узла в виде креста) показаны на рис. 8.11.

Изгибающий момент, поперечная и продольная силы для рам отрицательны, если направления этих силовых факторов противоположны направлениям, указанным на рис. 8.11.

### 8.8. Дифференциальные зависимости при плоском изгибе

Изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и интенсивность внешней распределенной нагрузки  $q$  связаны между собой определенной зависимостью.

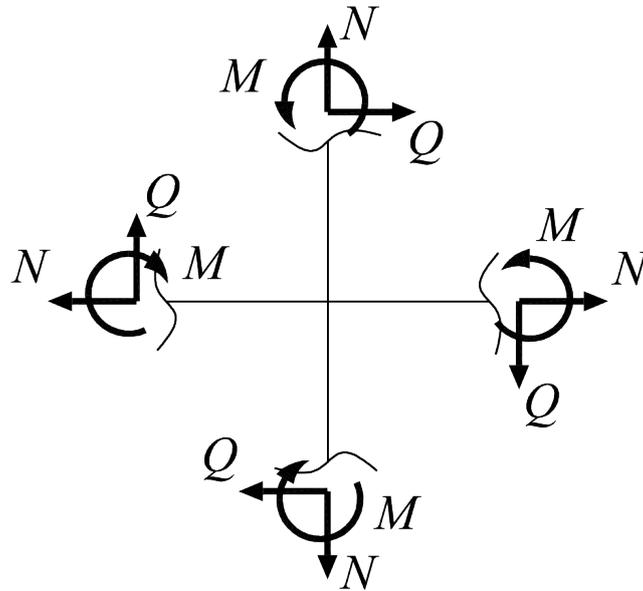


Рис. 8.11. Положительные направления внутренних силовых факторов для рам

Рассмотрим балку, находящуюся под действием плоской системы сил (рис. 8.12)

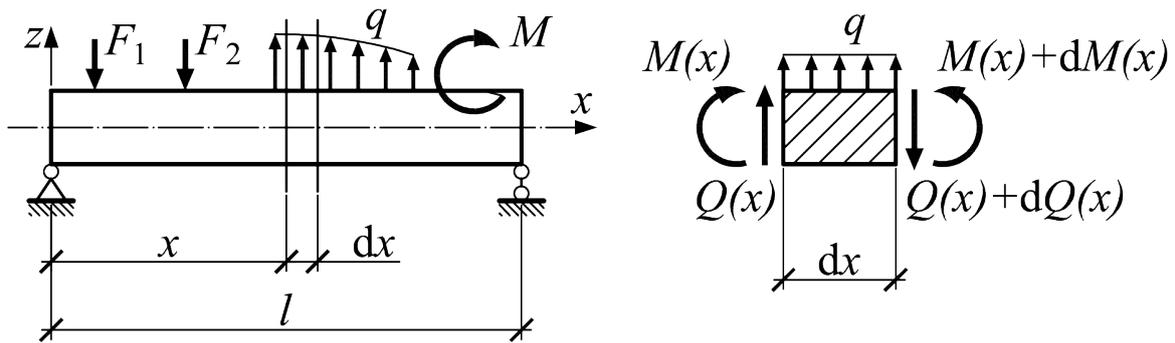


Рис. 8.12

Двумя поперечными сечениями  $x$  и  $(x + dx)$  вырежем из балки элемент так, чтобы на него не действовали внешние сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты. Интенсивность внешней распределенной нагрузки  $q$  на длине  $dx$  считаем постоянной.

Действие отброшенных частей заменим внутренними силовыми факторами. Действие левой части заменим изгибающим моментом  $M_{(x)}$  и поперечной силой  $Q_{(x)}$ , которые будем считать положительными. Аналогично заменим действие правой части моментом  $M_1 = M_{(x)} + dM_{(x)}$  и поперечной силой  $Q_1 = Q_{(x)} + rmdQ_{(x)}$ . Так как на длине элемента  $dx$  не приложены сосредоточенные силы и моменты, то в эпюрах  $M$  и  $Q$  не должно быть разрыва, поэтому изгибающий момент и поперечная сила в правом сечении будут

отличаться от их значений в левом сечении на величину малых приращений  $dM_{(x)}$  и  $dQ_{(x)}$ .

Вся балка в целом находится в равновесии, следовательно, и ее выделенный элемент  $dx$  со всеми приложенными к нему силами также должен находиться в равновесии.

Составим уравнения равновесия.

1. Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю:

$$\sum F_z = 0: \quad Q_{(x)} + q \cdot dx - (Q_{(x)} - dQ_{(x)}) = 0; \quad \rightarrow \quad q \cdot dx - dQ_{(x)} = 0.$$

Из этого равенства получим

$$\frac{dQ_{(x)}}{dx} = q. \quad (8.4)$$

Следовательно, *первая производная от поперечной силы по абсциссе  $x$  равна интенсивности распределенной нагрузки в сечении.*

2. Сумма моментов всех сил относительно центра правого сечения равна нулю:

$$\sum M_K = 0: \quad -M_{(x)} - Q_{(x)} \cdot dx - q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + (M_{(x)} + dM_{(x)}) = 0.$$

Отсюда

$$dM_{(x)} = Q_{(x)} \cdot dx + q \cdot \frac{(dx)^2}{2}.$$

В этом равенстве последнее слагаемое является малой величиной высшего порядка по сравнению с другими членами, поэтому его можно отбросить, тогда получим

$$dM_{(x)} = Q_{(x)} \cdot dx,$$

откуда

$$Q_{(x)} = \frac{dM_{(x)}}{dx} \quad (8.5)$$

Таким образом, *первая производная от изгибающего момента по абсциссе  $x$  равна поперечной силе.*

Формула (8.4), очевидно, не применима для сечений, в которых приложены внешние сосредоточенные силы. Аналогично формула (8.5) не применима для сечений, в которых приложены внешние сосредоточенные моменты

Из найденных выше двух дифференциальных зависимостей следует третья

$$\frac{d^2M_{(x)}}{dx^2} = \frac{dQ_{(x)}}{dx} = q, \quad (8.6)$$

то есть *вторая производная от изгибающего момента по абсциссе  $x$  равна первой производной от поперечной силы или равна интенсивности распределенной нагрузки.*

Выражения eq:IZGIB04–(8.6) представляют собой дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки при изгибе.

Эти формулы были получены русским ученым и инженером Д. И. Журавским. Они используются при анализе различных вопросов, связанных с изгибом балок, в частности, для проверки правильности построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Для отыскания экстремальных значений изгибающих моментов (наибольшего или наименьшего) необходимо первую производную от момента приравнять нулю. Следовательно, в сечениях, где изгибающий момент принимает наибольшее или наименьшее значение ( $M_{\text{экстр}}$ ), поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

Можно выписать следующие две зависимости, иллюстрирующие нахождение  $Q_{(x)}$  и  $q_{(x)}$  по моменту  $M_{(x)}$ :

1. Поперечная сила  $Q_{(x)}$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = Q_{(x)}.$$

2. Интенсивность распределенной нагрузки  $q_{(x)}$

$$\frac{d^2M_{(x)}}{dx^2} = \frac{dQ_{(x)}}{dx} = q.$$

Эти дифференциальные зависимости справедливы для участков действия сплошной распределенной нагрузки.

Обратные (интегральные) зависимости показывают, что зная интенсивность распределенной нагрузки  $q_{(x)}$  и начальные значения  $Q_0$  и  $M_0$  можно определить  $Q_{(x)}$  и  $M_{(x)}$ :

1. Поперечная сила  $Q_{(x)}$

$$Q_{(x)} = Q_0 + \int_0^x q(x);$$

2. Изгибающий момент  $M_{(x)}$

$$M_{(x)} = M_0 + \int_0^x Q_{(x)} \cdot dx.$$

В итоге получим уравнение для изгибающего момента  $M_{(x)}$  при действии сплошной распределенной нагрузки  $q_{(x)}$

$$M_{(x)} = M_0 + Q_0 \cdot x + \int_0^x dx \int_0^x q_{(x)} \cdot dx.$$

## 8.9. Эпюры внутренних силовых факторов. Правила их построения

Для исследования напряженного состояния балки необходимо знать, как изменяются внутренние усилия ( $Q$  и  $M$ ) по длине балки.

Чтобы иметь наглядное представление об изменении  $Q$  и  $M$  по длине балки, строят эпюры этих внутренних усилий.

Аналитический расчет плоской рамы также заключается в определении внутренних усилий ( $N$ ,  $Q$  и  $M$ ) от заданных внешних воздействий и в построении соответствующих эпюр на геометрической схеме рамы по осям стоек и ригелей.

Выражения для продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента представляют собой функции координаты  $x$  и для них можно построить графики (эпюры) изменения  $N$ ,  $Q$  и  $M$  по длине стержня.

**Определение 8.14** *Графики, изображающие законы изменения  $N$ ,  $Q$  и  $M$  вдоль геометрической оси балки (рамы), называются соответственно эпюрой продольных сил, эпюрой поперечных сил и эпюрой изгибающих моментов.*

*Ординаты этих эпюр представляют собой численные значения  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в соответствующих сечениях балки (рамы).*

При построении эпюр  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в статически определимых системах рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).
2. Разбиваем расчетную схему балки (рамы) на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает балку (раму) на две части.

Выбираем ту часть балки (рамы), на которую действует наименьшее число известных нагрузок. Для определения внутренних усилий в сечении совершенно безразлично, какую часть балки (рамы) рассматривать. Величины внутренних усилий будут одни и те же.

4. Составляем выражения (уравнения), показывающие закон изменения в пределах рассматриваемого участка продольной силы  $N$ , поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

5. По этим выражениям вычисляем численные значения продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях участка (на его границах). Если функциональная зависимость указанных силовых факторов нелинейная, вычисление производим еще и в промежуточной точке, например, в середине участка или в сечении, где функция достигает экстремального значения.

6. По полученным численным значениям продольных сил  $N$ , поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  строим эпюры (графики) этих внутренних усилий.

Эпюра каждого внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси балки (рамы). Для балок эпюры располагаются непосредственно под ней.

В проектных строительных организациях при построении эпюр для балок положительные значения продольных сил  $N$  и поперечных сил  $Q$  откладываются вверх от базисной прямой, а отрицательные значения — вниз.

Положительные значения изгибающих моментов  $M$  откладываются со стороны «растянутых» волокон, то есть вниз от базисной прямой, а отрицательные значения — со стороны «сжатых» волокон, то есть вверх от базисной прямой.

Таким образом, *эпюра изгибающих моментов  $M$  строится на «растянутом» волокне.*

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

7. Делаем проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов.

8. Отмечаем опасные сечения балки, где действуют максимальные (наибольшие) по абсолютной величине значения внутренних силовых факторов.

*Правила построения эпюр внутренних силовых факторов (внутренних усилий) в рамах такие же, как и в балках.*

### **8.10. Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для балок**

Дифференциальные зависимости Д. И. Журавского между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью внешней распределенной нагрузки определяют связь между эпюрами  $M$  и  $Q$ , построенными от любой внешней нагрузки. Эта взаимная связь имеет важное практическое значение для контроля правильности выполненного построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо.*

— «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз — имеется «скачок» вниз.

— «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

— На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на участках балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = \text{const}$ ).

— Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{\text{экстр}}$ ) в тех сечениях балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

— На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

— На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = \text{const}$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

### **8.11. Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для рам**

Построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в раме проверяются по правилам контроля для прямолинейных балок.

Кроме этого в раме необходимо проверить равновесие всех узлов.

Эта проверка состоит в том, что вырезанный узел под действием приложенных к нему всех внешних сосредоточенных нагрузок (сосредоточенных сил и моментов), а также внутренних силовых факторов (поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов) должен находиться в равновесии.

Для этого вырезают узел и прикладывают к нему внешние сосредоточенные нагрузки (сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты, если они приложены к узлу).

Затем к узлу прикладывают внутренние силовые факторы (поперечные силы  $Q$ , продольные силы  $N$  и изгибающие моменты  $M$ ), которые выражают действие отброшенных частей рамы на узел (с помощью эпюр  $Q$ ,  $N$  и  $M$ ).

Составляют три уравнения равновесия (статики), которые должны быть равны нулю:

$\sum F_x = 0$  — Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю;

$\sum F_z = 0$  — Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю;  
 $\sum M_A = 0$  — Сумма моментов всех сил относительно узла равна нулю.

## 8.12. Чистый изгиб балки. Основные гипотезы

Ранее было установлено, что при внешней нагрузке, перпендикулярной геометрической оси балки, в каждом ее поперечном сечении может возникать одновременно изгибающий момент и поперечная сила.

Изучение напряженного состояния балки удобнее начинать с частного случая, когда поперечная сила равна нулю, то есть с чистого изгиба.

Рассмотрим деформацию чистого изгиба балки. С помощью эксперимента установлено, что если на боковую поверхность балки из резинового бруса прямоугольного поперечного сечения нанести ортогональную сетку в виде продольных и поперечных прямых, то после деформирования на участке чистого изгиба продольные прямые принимают криволинейное очертание, а поперечные остаются прямыми. При этом сетка остается ортогональной (рис. 8.13).

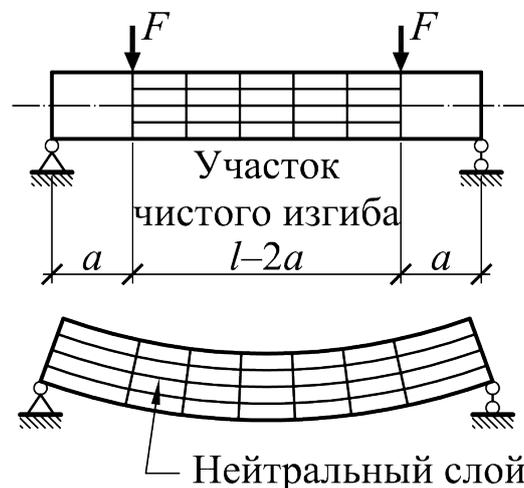


Рис. 8.13

Отсюда можно сделать вывод, что угловые деформации в плоскости изгиба отсутствуют, а поперечные сечения балки при изгибе не искривляются.

Из рисунка видно, что продольные волокна балки, расположенные в нижней ее части, растянуты, а в верхней части — сжаты.

**Определение 8.15** *Граница между растянутыми и сжатыми волокнами называется нейтральным слоем.*

*Нейтральный слой не испытывает растяжения и сжатия.*

Ниже нейтрального слоя в поперечных сечениях действуют растягивающие нормальные напряжения, а выше — сжимающие (рис. 8.13)

**Определение 8.16** *Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется нейтральной линией (нулевой линией) сечения.*

Экспериментальные и теоретические исследования чистого изгиба балок делают возможным принять следующие гипотезы:

1. *Гипотеза плоских сечений (гипотеза Я. Бернулли).* Поперечные сечения балки, плоские и нормальные к его геометрической оси (нейтральному слою) до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации.

Эта гипотеза равносильна предположению, что при изгибе поперечные сечения поворачиваются на некоторый угол относительно нейтральной линии, а угловые деформации в продольных сечениях балки отсутствуют.

2. *Продольные слои не давят друг на друга (взаимное давление между продольными слоями отсутствует).*

Отсюда следует, что продольные волокна испытывают центральное (одноосное) растяжение или сжатие.

3. *Деформации продольных волокон не зависят от их положения по ширине сечения.*

Из этого следует, что нормальные напряжения остаются одинаковыми по ширине сечения.

Задача об отыскании закона распределения напряжений по сечению балки является статически неопределимой и для ее решения необходимо дополнительно к уравнениям равновесия привлечь уравнения деформаций, которые можно сформулировать на основании экспериментальных наблюдений.

Вывод формулы для определения нормальных напряжений  $\sigma$  в поперечных сечениях балки проводится по следующей схеме:

1. Рассматривается *статическая сторона* задачи, то есть анализируются уравнения статики.

2. Рассматривается *геометрическая сторона* задачи. На основе опытного изучения данного вида деформации балки и принимаемых гипотез, устанавливаются зависимости между перемещением точек балки и их положением в сечении относительно принятой системы координат.

3. Рассматривается *физическая сторона* задачи — определяется зависимость между напряжениями и деформациями.

4. Производится синтез уравнений, то есть их совместное решение.

### 8.13. Определение нормальных напряжений

Изучим закон распределения напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе. Будем рассматривать балку с поперечным сечением, обладающим хотя бы одной осью симметрии, которая совпадает с силовой плоскостью.

Так как поперечные сечения симметричны относительно силовой плоскости, то для упрощения примем их прямоугольной формы (рис. 8.14).

В плоскости поперечного сечения проведем координатные оси  $y$  и  $z$ . Обозначим горизонтальную ось через  $y$ , а вертикальную ось через  $z$ .

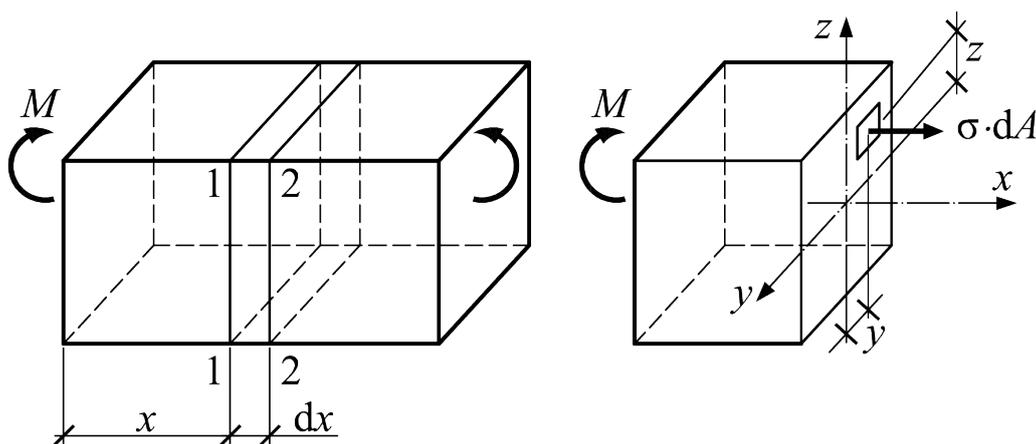


Рис. 8.14

Ось  $z$  совместим с силовой линией, а ось  $y$  проведем пока на произвольной высоте перпендикулярно оси  $z$ .

Изгибающий момент  $M$  (силовая плоскость) действует в силовой плоскости  $xoz$ . В плоскости поперечного сечения выделим элементарную площадку  $dA$ .

При чистом изгибе изгибающий момент  $M$  в поперечном сечении балки вызывает нормальные напряжения  $\sigma$ , а касательные напряжения  $\tau$  равны нулю.

### 8.13.1. Статическая сторона задачи.

Составим уравнения статики:

1. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю:

$$\sum F_x = 0 : \int_A \sigma \cdot dA = 0. \quad (8.7)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно оси  $z$  равна нулю:

$$\sum M_z = 0 : M + \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0. \quad (8.8)$$

3. Сумма моментов всех сил относительно оси  $y$  равна нулю:

$$\sum M_y = 0 : \int \sigma \cdot y \cdot dA = 0. \quad (8.9)$$

### 8.13.2. Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим деформацию той же балки. Выделим из балки сечениями 1—1 и 2—2 элемент длиной  $dx$  (рис. 8.15).

В результате деформации происходит изменение расстояний между поперечными сечениями — нижние волокна удлиняются, а верхние — укорачиваются. Естественно предположить, что можно найти и такие волокна, длина которых при изгибе не изменяется.

*Совокупность волокон, не изменяющих своей длины при изгибе балки, называется нейтральным слоем.*

Волокна, принадлежащие нейтральному слою, до деформации лежат в одной плоскости, а в деформированном состоянии образуют цилиндрическую поверхность. До и после деформации каждое поперечное сечение пересекается

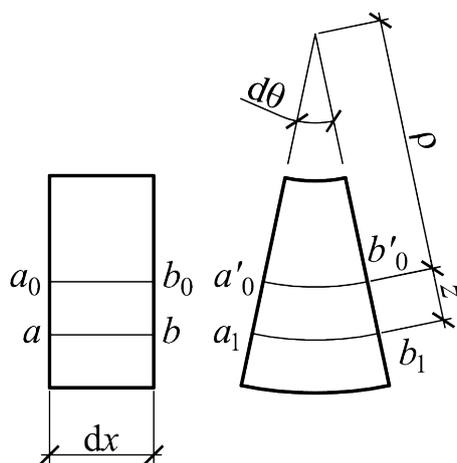


Рис. 8.15

с нейтральным слоем по прямой, которая называется *нейтральной (нулевой) линией сечения*.

При плоском изгибе нейтральный слой перпендикулярен силовой плоскости, а значит и нейтральная линия перпендикулярна силовой линии.

Будем считать, что ось  $y$  совпадает с нейтральной линией. Из рисунка 8.15 имеем

$$a_0 b_0 \rightarrow a'_0 b'_0 \text{ — с радиусом } \rho;$$

$$ab \rightarrow a_1 b_1 \text{ — с радиусом } \rho - z.$$

В последнем выражении  $\rho - z$  знак «минус» был поставлен по следующей причине. Согласно схеме, изображённой на рис. 8.15,  $z$  — не расстояние, указываемое по абсолютной величине, а именно координата волокна  $a_1 b_1$ , которая в данном случае будет отрицательной, поскольку положительное направление оси  $z$  направлено вверх, а координата указанного волокна находится ниже центра тяжести сечения. Учитывая, что для указанной схемы  $z$  — отрицательно, то для увеличения расстояния до растянутого волокна необходимо вычесть её из радиус-вектора  $\rho$ , то есть получаем  $\rho - z$ .

Найдем относительное удлинение произвольного волокна  $ab$

$$\varepsilon = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab}; \quad a_1 b_1 = (\rho - z) \cdot d\theta; \quad ab = dx \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{(\rho - z) d\theta - dx}{dx}.$$

Найдем относительное удлинение волокна  $a_0 b_0 = dx$ , принадлежащее нейтральному слою

$$a_0 b_0 = a'_0 b'_0 = \rho \cdot d\theta = dx \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{(\rho - z) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{z}{\rho} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\frac{z}{\rho}. \quad (8.10)$$

### 8.13.3. Физическая сторона задачи

Определим, в каком напряженном состоянии находится произвольное продольное волокно  $ab$ . На торцевой поверхности волокна (в сечении) касательные напряжения  $\tau$  равны нулю. Следовательно, в соответствии с законом парности касательных напряжений нет их и в сечениях, параллельных оси балки.

Нормальные напряжения  $\sigma_z$ , выражающие взаимодействие рассматриваемого волокна с соседними волокнами, в силу второй гипотезы равны нулю.

Таким образом, продольное волокно находится в линейном напряженном состоянии. Закон Гука для линейного напряженного состояния имеет вид

$$\sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (8.11)$$

### 8.13.4. Синтез уравнений.

Решая систему уравнений (8.10) и (8.11), получим

$$\sigma = -\frac{E \cdot z}{\rho} \rightarrow \sigma = -E \cdot \frac{z}{\rho}. \quad (8.12)$$

Подставляя выражение (8.12) в уравнение (??), получим

$$M = -\int_A \sigma \cdot z \cdot dA = \int_A \frac{z}{\rho} E \cdot z dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA = \frac{E \cdot I_y}{\rho} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_y}. \quad (8.13)$$

Из выражений (8.12) и (8.13), следует

$$\sigma = -\frac{M}{I_y} \cdot z. \quad (8.14)$$

Поясним появление в выражении (8.14) знака «минус». Для выбранной расчётной схемы в балке оказывается сжатой верхняя зона (напряжения имеют знак «минус»), растянутой — верхняя зона (напряжения имеют знак «плюс»). Соответственно, в верхней зоне координата  $z$  имеет знак «плюс», а напряжения

получаются со знаком «минус», аналогично в нижней зоне координата  $z$  имеет знак «минус», а напряжения получаются со знаком «плюс».

В практических расчётах часто выражение (8.14) удобно записывать по в следующем виде

$$\sigma = \pm \frac{M}{I_y} \cdot z. \quad (8.15)$$

При этом знак перед выражение (8.15) выбирают таким образом, чтобы получить значения напряжений в верхней и нижней частях согласно эпюре изгибающих моментов  $M$ , строящейся на растянутых волокнах.

Положение нейтральной оси (нулевой линии) определим из условия, что продольная сила в поперечном сечении балки при чистом изгибе равна нулю.

Рассмотрев уравнение равновесия (8.7), получим

$$\begin{aligned} \int_A \sigma \cdot dA = 0 & \rightarrow \int_A \frac{M}{I_y} \cdot z \cdot dA = \frac{M}{I_y} \cdot \int_A z \cdot dA = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow S_y = \int_A z \cdot dA = 0 \rightarrow S_y = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Статический момент сечения  $S_y$  относительно нейтральной оси  $y$  равен нулю лишь в том случае, когда *эта ось центральная*.

Рассмотрев уравнение равновесия (8.9), получим

$$\begin{aligned} \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = 0 & \rightarrow \int_A \frac{M}{I_y} \cdot y \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow \frac{M}{I_y} \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow I_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow I_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Центробежный момент инерции равен нулю относительно осей  $y$  и  $z$  лишь в том случае, когда они являются *главными центральными осями инерции*.

*Следовательно, ось  $y$  (нейтральная линия) проходит, через центр тяжести площади поперечного сечения, так как статический момент равен нулю ( $S_z = 0$ ), а оси  $y$  и  $z$  — главные центральные оси инерции, так как центробежный момент инерции сечения равен нулю ( $I_{yz} = 0$ ).*

Таким образом, мы получили формулу (8.15) для определения нормального напряжения  $\sigma$  при чистом изгибе в произвольной точке

поперечного сечения балки с координатой  $z$  относительно главных центральных осей.

По формуле (8.15) можно определять абсолютную величину нормального напряжения  $\sigma$ , а его знак устанавливать в зависимости от того, в сжатой или растянутой зоне находится рассматриваемая точка. В этом случае величины  $M$  и  $z$  берутся по абсолютным значениям.

Если же учитывать знаки изгибающего момента  $M$  и координаты  $z$ , то формула (8.15) позволяет определять численное значение нормального напряжения  $\sigma$  и его знак.

*Правило знаков.* При определении численных значений нормального напряжения  $\sigma$  по формуле (8.15) изгибающий момент  $M$  считается положительным, если он вызывает растяжение в точках первой четверти, принятой системы координат, поперечного сечения балки.

#### 8.14. Расчет балок на прочность при изгибе

Опытами установлено, что поперечная сила  $Q$ , возникающая в поперечных сечениях балки при плоском поперечном изгибе, мало влияет на нормальные напряжения балок и этим влиянием можно пренебречь.

Следовательно, формула (8.15) для вычисления нормальных напряжений в случае чистого изгиба балки вполне приемлема для расчета всех балок, работающих на изгиб, вызванный действием не только изгибающих моментов, но и поперечных сил.

Определим нормальные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях 1—1, 2—2 и 3—3 (рис. 8.16–8.18).

Формула (8.15) для определения нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки с координатой  $z$

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z.$$

показывает, что какую бы форму и размеры ни имело сечение, нормальные напряжения в точках 2—2 поперечного сечения балки, лежащих на главной оси  $y$  (на нейтральной оси  $z = 0$ ), равны нулю.

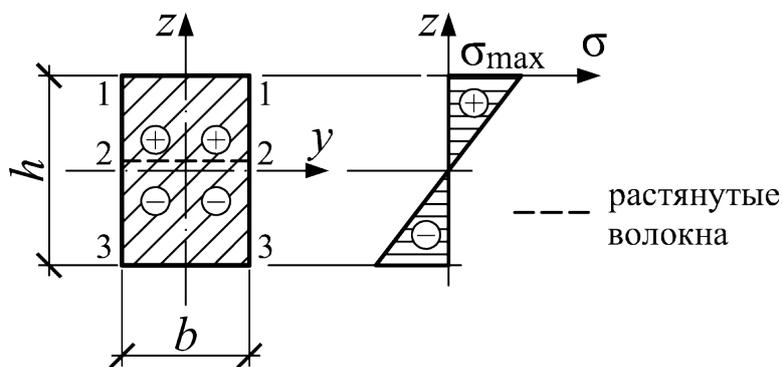


Рис. 8.16. Эпюра нормальных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки

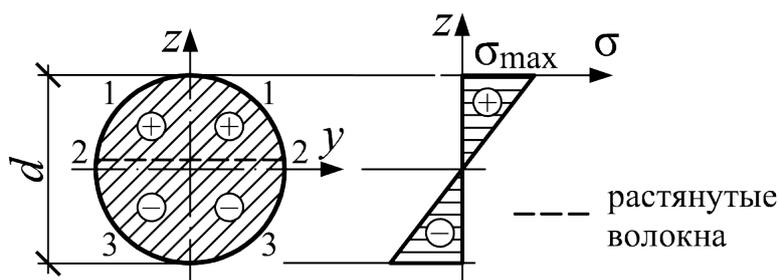


Рис. 8.17. Эпюра нормальных напряжений по высоте круглого поперечного сечения балки

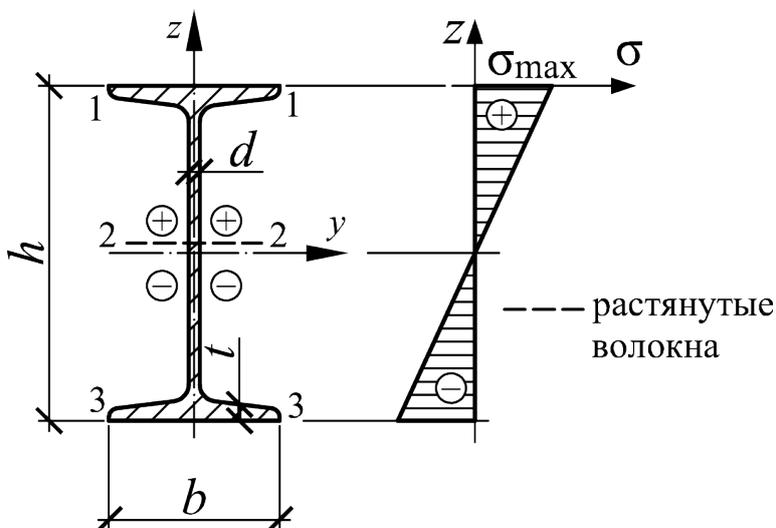


Рис. 8.18. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки

**Определение 8.17** *Нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения балки, в которых нормальные напряжения равны нулю.*

*Нейтральная ось при плоском изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярна к силовой плоскости.*

Нормальные напряжения линейно возрастают по мере удаления от нейтральной линии. При этом напряжения оказываются постоянными по ширине сечения (вдоль линии  $z = \text{const}$ ).

Наибольшей величины нормальные напряжения достигают в точках поперечного сечения, лежащих на линиях 1—1 и 3—3, то есть наиболее удаленных от нейтральной линии ( $z = z_{\text{max}}$ )

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{I_y} \cdot z_{\text{max}}.$$

Обозначая  $\frac{I_y}{z_{\text{max}}} = W_y$ , получаем формулу для определения максимальных напряжений в произвольном сечении балки

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_y}. \quad (8.18)$$

В этих формулах:

$I_y$  — главный момент инерции поперечного сечения относительно оси  $y$ ;

$z_{\text{max}}$  — максимальное расстояние (координата), измеряемое по оси  $z$  от главной оси  $y$  до наиболее удаленной точки поперечного сечения;

$W_y$  — момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ .

**Определение 8.18** *Опасными точками поперечного сечения называются точки, напряжения в которых достигают наибольших по величине значений.*

Максимальное нормальное напряжение в балке в случае чистого или плоского изгибов возникает в сечении, где изгибающий момент достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

**Определение 8.19** *Сечение, в котором изгибающий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение  $M_{\text{max}}$ , называется опасным сечением балки по нормальным напряжениям.*

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки.

Следовательно, наибольшие нормальные напряжения в балке при чистом и плоском изгибах будут равны

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \quad (8.19)$$

Построим эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  для некоторых типов поперечных сечений.

**Определение 8.20** *График, изображающий закон изменения нормальных напряжений  $\sigma$  по высоте поперечного сечения, называется эпюрой нормальных напряжений.*

Как следует из формулы (8.15), нормальные напряжения  $\sigma$  зависят линейно от координаты  $z$ , и по высоте поперечного сечения закон изменения нормальных напряжений представляет прямую линию.

На рис. 8.16–8.18 показаны в общем виде эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  для прямоугольного, круглого и двутаврового поперечных сечений балки для случая растянутых верхних волокон.

Размеры элементов конструкций (поперечные сечения и длина) необходимо подбирать такими, чтобы под действием внешних нагрузок они не разрушались и не получали деформаций выше допустимого предела.

В условиях массового строительства также возникает проблема экономии строительных материалов при полной гарантии прочности конструкций.

Для безопасной работы конструкции необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в ее элементах, были ниже предельных значений.

Поэтому при проектировании необходимо правильно установить напряжения, обеспечивающие безопасность конструкции.

В настоящее время применяются, в основном, два метода расчета на прочность: *по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям*. Оба метода преследуют одну цель — обеспечить сооружению прочность и долговечность.

Первый метод еще недавно широко использовался в строительном деле и частично используется в настоящее время. По этому методу размеры элементов конструкции должны быть такими, чтобы во всех сечениях напряжения, вызываемые нагрузкой, не превышали допускаемой величины.

Второй, более прогрессивный метод расчета по предельным состояниям, был разработан советскими учеными. В настоящее время он является основным методом, применяемым при проектировании сооружений в нашей стране.

Нормами установлены три вида предельных состояний. В сопротивлении материалов рассматривается главным образом первое предельное состояние, связанное с прочностью конструкции, и отчасти второе, зависящее от развития чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу допускаемых напряжений* имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (8.20)$$

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу предельных состояний* имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B. \quad (8.21)$$

В этих формулах:

$\sigma_{\max}$  — максимальное нормальное напряжение;

$M_{\max}$  — наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  — момент сопротивления поперечного сечения относительно главной оси  $y$  (нейтральная ось);

$[\sigma]$  — допускаемое нормальное напряжение материала элементов конструкции;

$R^H$  — нормативное сопротивление материала элементов конструкции;

$n$  — коэффициент перегрузки;

$k$  — коэффициент однородности материала элементов конструкции;

$m_B$  — коэффициент условий работы элементов конструкции.

Величина допускаемых напряжений  $[\sigma]$  назначается в зависимости от материала, из которого изготовлена балка.

Пластичные материалы обладают примерно равными пределами текучести на сжатие и на растяжение, поэтому

$$[\sigma_c] = [\sigma_p] = [\sigma].$$

Для хрупких материалов, у которых прочность на сжатие выше, чем на растяжение, допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, как правило, не равны между собой  $[\sigma_c] \geq [\sigma_p]$  и, поэтому, необходимо записывать два условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y} \cdot z_{\max,p} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y} \cdot z_{\max,c} \leq [\sigma_c], \quad (8.22)$$

где  $z_{\max,p}$  и  $z_{\max,c}$  — расстояния (координаты) от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон.

Величина  $R$ , равная

$$R = R^H \cdot k \cdot m_B \quad (8.23)$$

называется *расчётным сопротивлением* материала элементов конструкции.

Пользуясь условием прочности при чистом и плоском изгибах по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений (8.20) и методу предельных состояний (8.21), можно решать применительно к изгибу известные нам три типа задач:

1) *Проектный расчет*. В этом случае известны внешняя нагрузка и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ). По заданной нагрузке определяют наибольший изгибающий момент  $M_{\max}$  (по эпюре изгибающих моментов) и из условия прочности (8.20) или (8.21) находят величину требуемого момента сопротивления поперечного сечения по формулам:

а) По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (8.24)$$

б) По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max} \cdot n}{R^H \cdot k \cdot m_B}. \quad (8.25)$$

По полученной величине требуемого момента сопротивления  $W_y^{\text{треб}}$  подбирают размеры поперечных сечений балки таким образом, чтобы действительный момент сопротивления  $W_y$  примерно равнялся бы требуемому

$$W_y \approx W_y^{\text{треб}}.$$

Как известно, момент сопротивления  $W_y$  для простых поперечных сечений определяется по формулам через размеры сечения или по сортаментам для прокатных профилей.

Подбор сечения производят следующим образом:

— если балка проектируется из прокатного профиля, то необходимый номер профиля берется по таблицам сортамента прокатных сталей в зависимости от величины требуемого момента сопротивления  $W_y^{\text{треб}}$ ;

— в случае подбора круглого сплошного сечения балки диаметром  $d$ , известно, что момент сопротивления  $W_y$  определяется по формуле

$$W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Приравнивая  $W_y \approx W_y^{\text{треб}}$ , находят требуемый диаметр балки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32W_y^{\text{треб}}}{\pi}}.$$

— в случае подбора прямоугольного поперечного сечения балки размером  $b \times h$ , предварительно задаются соотношением  $\beta = \frac{h}{b}$ , то есть  $h = \beta \cdot b$ .

Известно, что момент сопротивления  $W_y$  для прямоугольного поперечного сечения балки определяется по формуле

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (\beta \cdot b)^2}{6} = \frac{\beta^2 \cdot b^3}{6}.$$

Приравнивая  $W_y \approx W_y^{\text{треб}}$ , находят требуемые размеры балки

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_y^{\text{треб}}}{\beta^2}}; \quad \rightarrow \quad h = \beta \cdot b.$$

2) Определение допускаемой нагрузки (несущей способности). В этом случае известны размеры поперечного сечения ( $W_y$ ) и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ).

Из условия прочности (8.20) или (8.21) находят наибольшую допускаемую величину изгибающего момента:

а) По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_y \cdot [\sigma]. \quad (8.26)$$

б) По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_y \cdot R^H \cdot k \cdot m_B \cdot 1/n. \quad (8.27)$$

По найденному допускаемому значению изгибающего момента  $[M_{\max}]$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

3) Проверочный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка, размеры поперечного сечения ( $W_y$ ) и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ).

Требуется определить наибольшее нормальное напряжение, возникающее в элементах конструкции, и сравнить с допускаемым напряжением или расчетным сопротивлением, то есть проверить выполнение условия прочности (8.20) или (8.21):

а) По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

б) По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B.$$

## 8.15. Рациональные формы поперечных сечений балок

Характер распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях балки позволяет сделать выводы о рациональной форме поперечного сечения при чистом и плоском изгибах.

В отличие от центрального растяжения (сжатия) напряжения в сечении распределяются неравномерно. Материал, расположенный у нейтрального слоя, нагружен незначительно.

Поэтому, в целях экономии материала и снижения веса конструкции, для стержней, работающих на изгиб, следует выбирать такие формы сечения, чтобы значительная часть материала была наиболее удалена от нейтральной линии.

Идеальным является сечение, изображенное на рисунке (8.19).

Из практически встречающихся профилей наиболее близко к идеальному сечению — это двутавровое сечение.

Несущая способность балки определяется выражением (8.26) или (8.27):

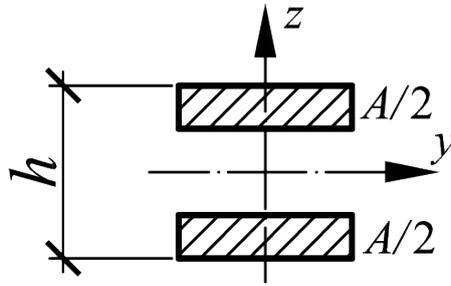


Рис. 8.19. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки

а) По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_y \cdot [\sigma].$$

б) По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_y \cdot R^H \cdot k \cdot m_B \cdot 1/n.$$

Расход же материала пропорционален площади сечения  $A$ . Следовательно, чем больше отношение  $\frac{W_y}{A}$ , тем больший изгибающий момент выдерживает сечение с заданной площадью. Отношение  $k = \frac{W_y}{A}$  можно принять за критерий, оценивающий качество формы поперечного сечения.

Рассмотрим несколько видов поперечных сечений (рис. 8.20):

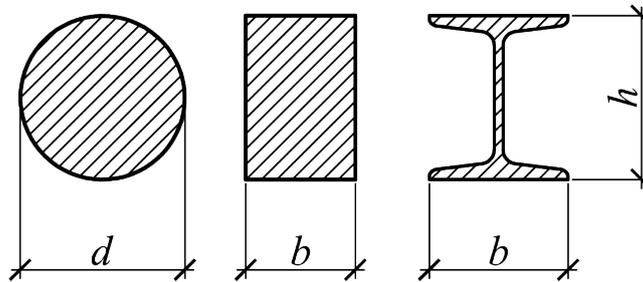


Рис. 8.20. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки

— для круглого сечения

$$k = \frac{\frac{\pi d^3}{32}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{8} = 0.125d = (0.125h);$$

— для прямоугольного сечения

$$k = \frac{\frac{bh^2}{6}}{bh} = \frac{h}{6} = 0.167h;$$

— для двутаврового сечения

$$k = (0.29 - 0.31) \cdot h.$$

## 8.16. Плоский поперечный изгиб. Касательные напряжения при изгибе

В отличие от чистого изгиба при плоском поперечном изгибе в сечении балки возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила  $Q$ .

Поэтому при плоском изгибе в поперечных сечениях балки наряду с нормальными напряжениями  $\sigma$ , вызванными изгибающим моментом, возникают и касательные напряжения  $\tau$ , вызванные поперечными силами.

Вследствие сдвигов гипотеза плоских сечений при плоском изгибе нарушается, плоские до деформации сечения слегка искривляются.

Исследования этого вопроса показали, что влияние указанного эффекта на величину нормальных напряжений невелико и поэтому влиянием сдвигов на закон распределения нормальных напряжений при плоском (поперечном) изгибе пренебрегают.

Таким образом, гипотеза плоских сечений распространяется и на плоский поперечный изгиб.

Задача определения напряжений в поперечных сечениях балки статически неопределима и требует рассмотрения трех сторон задачи (статической, геометрической и физической).

Однако иногда можно принять такие гипотезы о распределении напряжений, при которых задача становится статически определимой и отпадает необходимость в привлечении геометрических и физических сторон задачи.

Для определения касательных напряжений в случае плоского поперечного изгиба примем следующие гипотезы:

1. Направления всех касательных напряжений в сечении параллельны поперечной силе, которая является их равнодействующей.

2. Касательные напряжения равномерно распределены по ширине сечения балки (при  $b \ll h$ ).

3. Величина нормальных напряжений принимается как при чистом изгибе, то есть выполняется гипотеза плоских сечений.

Проведем вывод формулы касательных напряжений при плоском изгибе на примере балки прямоугольного поперечного сечения шириной  $b$  (рис. 8.21).

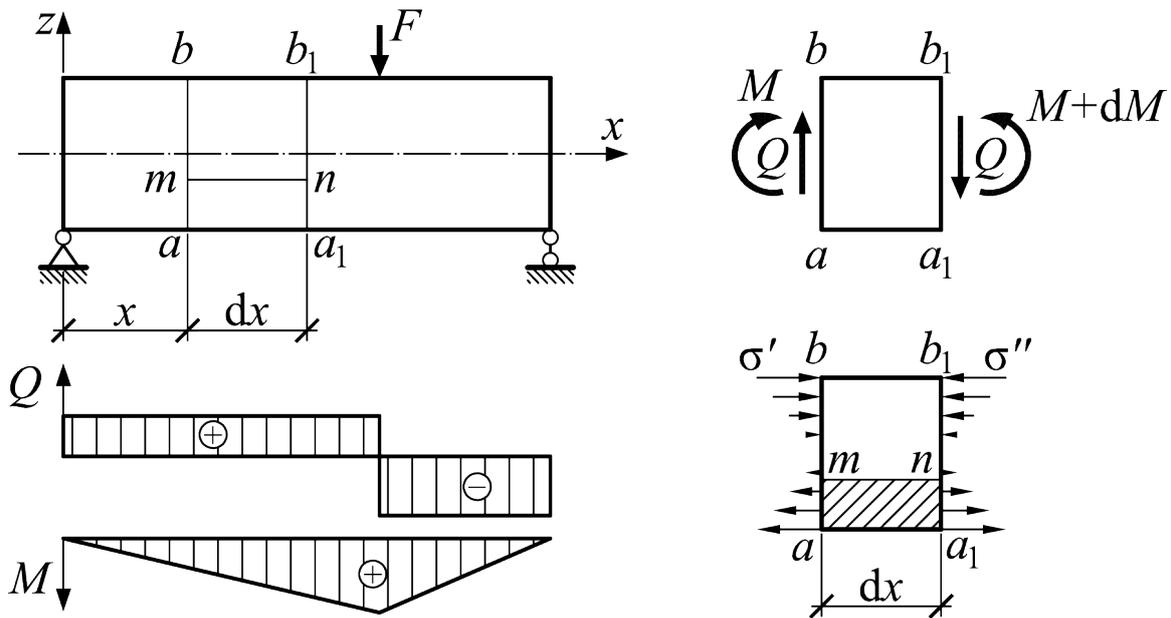


Рис. 8.21. Эпюры нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки

Для вывода формулы касательных напряжений вырежем из балки двумя сечениями  $a—b$  и  $a_1—b_1$  элементарный элемент длиной  $dx$ .

В сечении  $a—b$  изгибающий момент вызывает нормальные напряжения  $\sigma'$ , а поперечная сила касательные напряжения  $\tau_1 = \tau$ .

В сечении  $a_1—b_1$  изгибающий момент вызывает нормальные напряжения  $\sigma''$ , а поперечная сила касательные напряжения  $\tau_2$ .

Для определения касательных напряжений в плоскости сечения, расположенной параллельно нейтральному слою, разрежем вырезанную часть балки плоскостью  $m—n$  и отбросим верхнюю часть. Действие отброшенной части на оставшуюся нижнюю часть (заштрихованная часть, рис. 8.21) заменим предполагаемой сдвигающей силой  $dT$ .

Таким образом, на передней, задней и нижней гранях отсеченной части выделенного элемента (заштрихованная часть, рис. 8.21) нет напряжений, так как эти грани свободны от поверхностной нагрузки.

По боковым граням отсеченной части выделенного элемента (сечения  $a—b$  и  $a_1—b_1$ ) действуют нормальные напряжения  $\sigma'$  и  $\sigma''$ , вызванные изгибающими моментами, и касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , вызванные поперечными силами.

В плоскости сечения, расположенной параллельно нейтральному слою, действует сдвигающая сила  $dT = \tau' \cdot b \cdot dx$  (рис. 8.22).

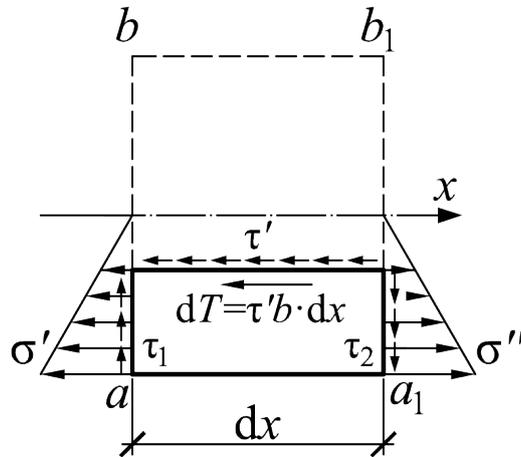


Рис. 8.22. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки

Составим уравнение равновесия (уравнения статики)

$$\sum F_x = 0: \quad -\tau' \cdot b \cdot dx - \int_{A_{отс}} \sigma' \cdot dA + \int_{A_{отс}} \sigma'' \cdot dA = 0.$$

Нормальные напряжения, действующие на гранях выделенного элемента, равны

$$\sigma' = \frac{M \cdot z}{I_y}; \quad \sigma'' = \frac{(M + dM) z}{I_y}.$$

Подставив в уравнение равновесия, получим

$$\begin{aligned} -\tau' \cdot b \cdot dx - \int_{A_{отс}} \frac{M \cdot z}{I_y} dA + \int_{A_{отс}} \frac{(M + dM) z}{I_y} dA = 0 &\rightarrow \\ \rightarrow -\tau' \cdot b \cdot dx + \frac{dM}{I_y} \cdot S_y^{отс} = 0 &\rightarrow \tau' = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_y^{отс}}{b \cdot I_y}. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{dM}{dx} = Q,$$

то

$$\tau' = \frac{Q \cdot S_y^{отс}}{b \cdot I_y}.$$

На основании закона парности касательных напряжений имеем

$$\tau' = \tau = \frac{Q \cdot S_y^{отс}}{b \cdot I_y}.$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y^{\text{отс}}}{b(z) \cdot I_y}. \quad (8.28)$$

Полученное выражение представляет собой формулу Д. И. Журавского для определения касательных напряжений в произвольной точке поперечного сечения балки при плоском поперечном изгибе.

В этой формуле

$Q$  — абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$S_y^{\text{отс}}$  — абсолютное значение статического момента «отсеченной» части поперечного сечения балки относительно нейтральной оси (главной оси  $y$ );

$b(z)$  — ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки;

$I_y$  — главный момент инерции поперечного сечения балки.

$z$  — координата точки поперечного сечения, в которой определяется касательное напряжение.

«Отсеченной» частью поперечного сечения балки является часть поперечного сечения, расположенная по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси (главной оси  $y$ ).

Таким образом, касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки при плоском поперечном изгибе равно произведению поперечной силы  $Q$ , действующей в рассматриваемом сечении балки, на статический момент  $S_y^{\text{отс}}$  части поперечного сечения, лежащей выше (или ниже) рассматриваемого слоя, относительно нейтральной оси и деленному на ширину  $b(z)$  слоя поперечного сечения и на главный момент инерции  $I_y$  всего сечения относительно нейтральной оси.

В любом поперечном сечении балки статический момент отсеченной части  $S_y^{\text{отс}}$  для самых отдаленных от нейтральной оси (главной оси  $y$  точек сечения равен нулю, поэтому касательные напряжения  $\tau$  в них равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси (главной оси  $z$ ),  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2} = S_{\text{max}}$ , следовательно, касательные напряжения в них достигают максимальных значений (*опасные точки*).

Здесь  $S_y^{1/2} = S_{\text{max}}$  — статический момент половины поперечного сечения.

**Определение 8.21** Сечение, в котором поперечная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение  $Q_{\max}$ , называется опасным сечением балки по касательным напряжениям.

Таким образом, наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_y^{1/2}}{b(z) \cdot I_y}. \quad (8.29)$$

Рассмотрим распределение касательных напряжений при изгибе по высоте некоторых типов поперечных сечений (эпюры  $\tau$ ).

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения зависит от формы сечения.

**Определение 8.22** График, изображающий закон изменения напряжений  $\tau$  по высоте поперечного сечения, называется эпюрой касательных напряжений.

Из формулы (8.28) видно, что касательные напряжения в балке изменяются по высоте поперечного сечения по тому же закону, что  $\frac{S_y^{\text{отс}}}{b(z)}$ .

### 8.17. Касательные напряжения в балках прямоугольного поперечного сечения

В прямоугольном сечении  $b(z) = b = \text{const}$ , поэтому закон распределения будет таким же, что и для статического момента «отсеченной» части поперечного сечения  $S_y^{\text{отс}}$

$$S_y^{\text{отс}} = \int_z^{\frac{h}{2}} b \cdot z \cdot dz = b \cdot \left. \frac{z^2}{2} \right|_z^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Следовательно, касательные напряжения в произвольной точке прямоугольного поперечного сечения балки с координатой  $z$  вычисляются по формуле

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y^{\text{отс}}}{b(z) \cdot I_y} = \frac{6Q}{bh^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (8.30)$$

Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте прямоугольного поперечного сечения изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях 1—1, 2—2 и 3—3 (рис. 8.23).

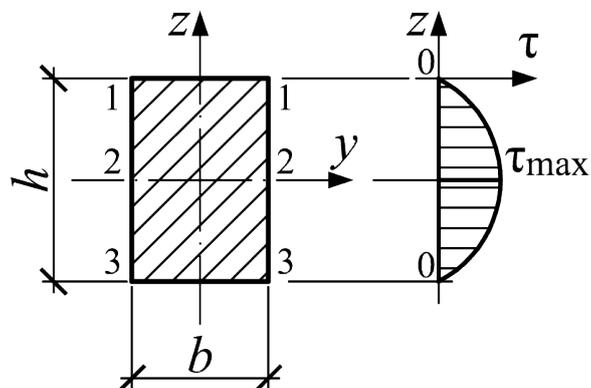


Рис. 8.23. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения балки

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях 1—1 и 3—3, то есть наиболее удаленных от нейтральной оси (при  $z = \pm \frac{h}{2}$ ), касательные напряжения равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси 2—2 (при  $z = 0$ ), возникают наибольшие касательные напряжения (*опасные точки*).

Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (8.31)$$

В этой формуле

$\tau_{\max}$  — максимальное касательное напряжение;

$Q$  — абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = b \cdot h$  — площадь прямоугольного поперечного сечения балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (8.31) подставить  $Q = Q_{\max}$ .

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A}. \quad (8.32)$$

На рис. 8.23 показан общий вид эпюры касательных напряжений  $\tau$  для прямоугольного поперечного сечения балки.

### 8.18. Касательные напряжения в балках круглого поперечного сечения

Предполагается, что вертикальные проекции касательных напряжений равномерно распределены по ширине круглого сечения. Эти составляющие касательного напряжения определяются по формуле (8.28). Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте круглого поперечного сечения также изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях 1—1, 2—2 и 3—3 (рис. 8.24).

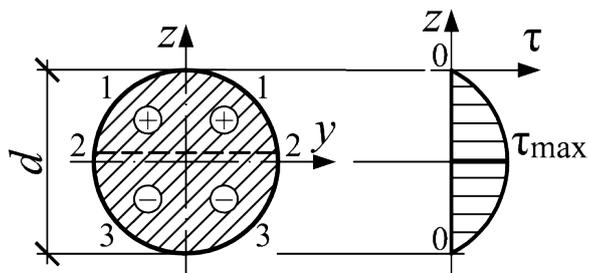


Рис. 8.24. Эпюра касательных напряжений для круглого поперечного сечения балки

В точках круглого поперечного сечения, лежащих на линиях 1—1 и 3—3, то есть наиболее удаленных от нейтральной оси (при  $z = \pm \frac{d}{2}$ ), касательные напряжения равны нулю, так как  $S_y^{\text{отс}} = 0$ .

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси 2—2 (при  $z = 0$ ), возникают наибольшие касательные напряжения (*опасные точки*), так как  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2} = S_{\text{max}}$ .

Здесь  $S_y^{1/2}$  — статический момент половины поперечного сечения относительно нейтральной оси (главной оси  $y$ ).

Максимальное касательное напряжение для круглого поперечного сечения балки можно вычислить по формуле

$$\tau_{\text{max}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (8.33)$$

В этой формуле

$\tau_{\text{max}}$  — максимальное касательное напряжение;

$Q$  — абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$  — площадь круглого поперечного сечения балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (8.33) подставить  $Q = Q_{\max}$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{A}. \quad (8.34)$$

На рис. 8.24 показан общий вид эпюры касательных напряжений  $\tau$  для круглого поперечного сечения балки.

### 8.19. Касательные напряжения в балках двутаврового поперечного сечения

Характерной особенностью этого сечения является резкое изменение ширины сечения при переходе от стенки двутавра к его полке.

При определении касательных напряжений в *полке* двутавра необходимо иметь в виду, что для их определения нельзя использовать формулу Д. И. Журавского (8.28), так как предположение о равномерности распределения касательных напряжений по ширине полки здесь не выполняется.

Таким образом, вопрос о величине и законе распределения касательных напряжений в полках двутавра остается неразрешенным.

Однако, ввиду того, что в этих сечениях касательные напряжения невелики, то их обычно не вычисляют.

Значительно больший интерес представляют касательные напряжения в *стенке* двутавра, так как, в основном, поперечную силу воспринимает стенка.

Касательные напряжения в этом случае можно определять по формуле Д. И. Журавского (8.28)

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y^{\text{отс}}}{b(z) \cdot I_y}.$$

Для этого обычно определяют численные значения касательных напряжений в характерных точках поперечного сечения, лежащих на линиях 4—4, 2—2 и 5—5 стенки двутавра (рис. 8.25).

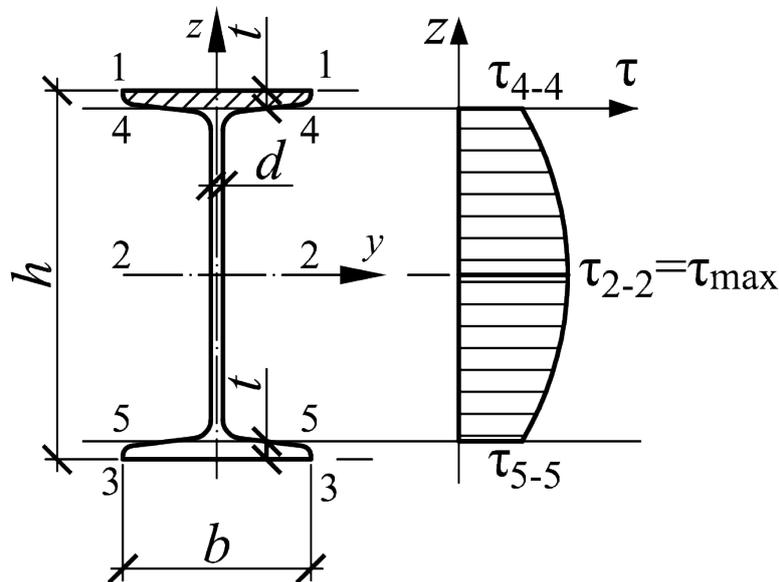


Рис. 8.25. Эпюра касательных напряжений для двутаврового поперечного сечения балки

Максимальные касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии 2—2 (на главной оси  $y$ ) двутавра (*опасные точки*), поэтому для поперечного сечения балки из двутавра  $b(z) = d$  (рис. 8.25).

Отсеченная часть фигуры, в этом случае, — верхняя половина поперечного сечения, поэтому

$$S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2},$$

где  $S_y^{1/2}$  — статический момент половины сечения относительно главной оси  $y$  (для прокатных профилей эта величина приводится в соответствующем сортаменте).

Для определения касательных напряжений в точках, лежащих на линиях 4—4 и 5—5, находят статический момент полки (отсеченная часть сечения — заштрихованная полочка двутавра, рис. 8.25)

$$\begin{aligned} S_y^{\text{отс}} = S_y^{\text{полки}} &= S_y^{1/2} - S_y^{1/2 \text{ стенки}} = S_y^{1/2} - d \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t\right) = \\ &= S_y^{1/2} - \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)^2. \end{aligned}$$

По полученным численным значениям  $\tau$  в сечениях 2—2, 4—4 и 5—5 строят эпюру касательных напряжений по высоте *стенки* двутавра (рис. 8.25).

При рассмотрении касательных напряжений в полках, как было указано выше, уже нельзя предполагать, что касательные напряжения равномерно распределены по ширине  $b$  полки.

Например, видно, что при  $z = \pm \left[ \frac{h}{2} - t \right]$  касательные напряжения на нижней грани верхней полки и на верхней грани нижней полки должны быть равны нулю, в то время как в месте соединения полки со стенкой эти напряжения не равны нулю.

Следовательно, применение формулы Д. И. Журавского для определения касательных напряжений в полке приводит к ошибочным, по существу, результатам. Можно лишь утверждать, что при небольшой толщине полки касательные напряжения в полке весьма малы.

В то же время в месте резкого изменения ширины сечения возникает значительная концентрация напряжений. В действительности, в прокатных двутавровых балках в вершинах входящих углов делаются закругления, снижающие концентрацию напряжений.

*Таким образом, величина касательных напряжений в районе границы полки и стенки не может быть точно установлена методами сопротивления материалов.*

Для определения горизонтальных составляющих касательных напряжений в точках полки можно воспользоваться формулой Д. И. Журавского, принимая в ней за  $S_y^{\text{отс}}$  статический момент относительно нейтральной оси части полки, а за  $b(z)$  — толщину полки  $t$  (рис. 8.26).

В результате получим

$$S_y^{\text{отс}} = t \left[ \frac{b}{2} - z \right] \frac{h-t}{2}.$$

Касательные напряжения будут равны

$$\tau^{\text{гор}} = \frac{Q \cdot t}{t \cdot I_y} \cdot \left( \frac{b}{2} - z \right) \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \frac{Q}{2I_y} \cdot \left( \frac{b}{2} - z \right) \cdot (h-t).$$

Таким образом,  $\tau^{\text{гор}}$  изменяется в пределах полки по линейному закону.

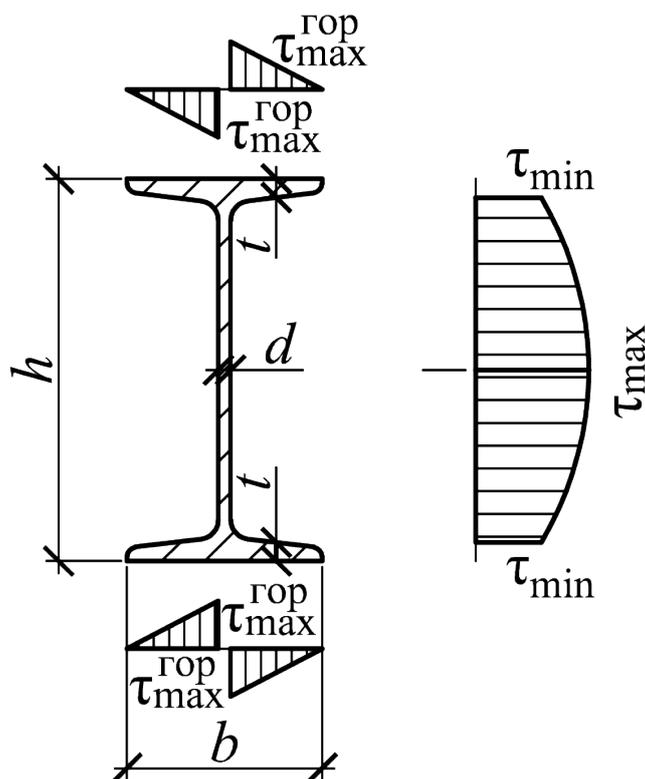


Рис. 8.26

Максимальное значение  $\tau^{\text{гор}}$  принимает при  $z = \frac{d}{2}$

$$\tau_{\text{max}}^{\text{гор}} = \frac{Q}{2I_y} \cdot \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) (h - t) = \frac{Q}{4I_y} \cdot (b - d) \cdot (h - t).$$

В балках сплошного сечения чаще всего величина касательных напряжений по сравнению с нормальными напряжениями невелика, и большей частью производить проверку прочности балки по касательным напряжениям нет необходимости.

В коротких балках, сильно нагруженных вблизи опор, и в балках тонкостенного профиля касательные напряжения могут иметь сравнительно большую величину.

*Поэтому на практике обычно подбирают размеры поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям, а затем уже проверяют, удовлетворяет ли выбранное сечение балки условию прочности по касательным напряжениям.*

В этом случае проверка прочности по методу допускаемых касательных напряжений производится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_y^{1/2}}{b(z) \cdot I_y} \leq [\tau], \quad (8.35)$$

где  $[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Для стальных балок обычно принимают допускаемое касательное напряжение

$$[\tau] \approx 0.6 \cdot [\sigma].$$

## 8.20. Анализ напряженного состояния при изгибе. Главные напряжения при изгибе

Выделим на всю ширину балки в окрестности некоторой точки элементарный параллелепипед 1—2—3—4 (рис. 8.27).

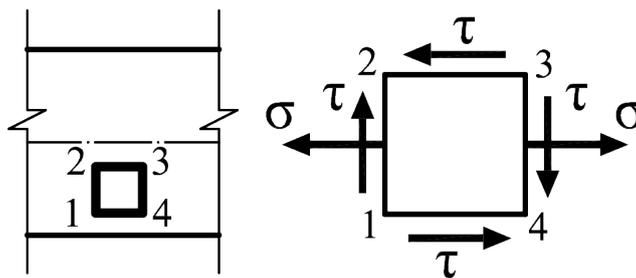


Рис. 8.27

По граням 1—2 и 3—4 действуют нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения, а по граням 2—3 и 1—4 — только касательные напряжения  $\tau$ .

Величины напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  определяются по формулам (8.14) и (8.27) соответственно

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_y^{\text{отс}}}{b(z) \cdot I_y}.$$

Передняя и задняя грани элементарного параллелепипеда совпадают с боковыми поверхностями балки, свободными от нагрузки, а потому на этих гранях напряжения равны нулю. Следовательно, параллелепипед находится в *условиях плоского напряженного состояния*.

На площадках, наклоненных под различными углами к боковым граням элементарного параллелепипеда, действуют нормальные и касательные

напряжения, величины которых можно определить по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_z \cdot \sin^2 \alpha - \tau_{zx} \cdot \sin 2\alpha; \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{zx} \cdot \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (8.36)$$

Имеются две взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие на них, — *главными нормальными напряжениями*.

На площадках, наклоненных под углами  $\alpha = 45^\circ$  к главным площадкам, действуют экстремальные (максимальные) касательные напряжения. Эти площадки называются *площадками сдвига*.

Главные нормальные и экстремальные (максимальные) касательные напряжения для плоского изгиба определяются по формулам, исходя из *общего случая плоского напряженного состояния*.

В нашем случае  $\sigma_x = \sigma$ ;  $\tau_{zx} = \tau$ . Величиной нормальных напряжений в горизонтальных площадках  $\sigma_z$  будем пренебрегать, поэтому для рассматриваемого случая формулы главных напряжений и экстремальных (максимальных) касательных напряжений (4.8) и (4.11) для плоского изгиба примут следующий вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}^{\min} &= \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ \tau_{\max}^{\min} &= \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\end{aligned}\quad (8.37)$$

Угол наклона главных площадок определяется по формуле (4.9)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}.\quad (8.38)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\tau$  — нормальное и касательное напряжения в рассматриваемой точке, действующие по площадке, совпадающей с поперечным сечением балки.

Рассмотрим напряженное состояние в точках прямоугольного поперечного сечения балки (рис. 8.28).

В поперечном сечении на наружной поверхности балки (в точках *a* и *b*), касательные напряжения  $\tau$  равны нулю, а нормальные напряжения  $\sigma$  равны (8.18)

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M}{W_y}.$$

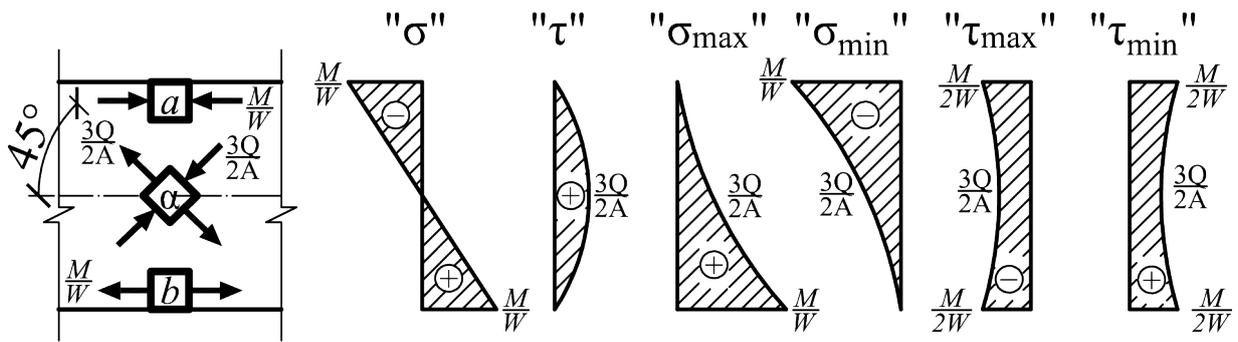


Рис. 8.28

В этих точках возникает одноосное (линейное) напряженное состояние.

Экстремальные (максимальные) касательные напряжения в точках  $a$  и  $b$  определяются по формуле (4.5)

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma}{2}. \quad (8.39)$$

В точке  $d$  нормальное напряжение  $\sigma$  равно нулю, а касательное напряжение  $\tau$  равно (8.31)

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}.$$

В этих точках напряженное состояние представляет собой *чистый сдвиг* с касательными напряжениями

$$\tau = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}.$$

Две главные площадки наклонены под углами  $\alpha = \pm 45^\circ$  к оси балки, а главные напряжения на них равны (8.31)

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \tau = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (8.40)$$

Вычисляя главные напряжения для целого ряда точек, какого — либо поперечного сечения, можно построить эпюры главных растягивающих, главных сжимающих, а также наибольших касательных напряжений, которые развиваются в площадках, наклоненных к главным площадкам под углом  $\alpha = \pm 45^\circ$  (рис. 8.28).

## 8.21. Полная проверка прочности балки при плоском поперечном изгибе

Обычно, дополнительную проверку на прочность по главным напряжениям производят для поперечных сечений, у которых ширина резко меняется вблизи краев сечения, например, в двутавре, швеллере или пустотелом прямоугольном профиле. Эпюры нормальных и касательных напряжений для таких профилей (например, рис.8.18 и 8.25) показывают, что на уровне перехода от полки к стенке (точки 4—4 и 5—5) касательные и нормальные напряжения имеют величину, близкую к максимальной.

По главным напряжениям проверяются те сечения балки по ее длине, где одновременно изгибающий момент и поперечная сила достигают большой величины. Причем, если таких сечений несколько, то проверяются все эти сечения.

В этом случае дополнительная проверка на прочность по главным напряжениям при изгибе производится в зависимости от принятой теории прочности.

Эти условия прочности имеют вид:

**1-я теория** — теория наибольших нормальных напряжений

$$\sigma^I = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.41)$$

**2-я теория** — теория наибольших деформаций (удлинений)

$$\sigma^{II} = 0.35 \cdot \sigma + 0.65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.42)$$

**3-я теория** — теория наибольших касательных напряжений

$$\sigma^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.43)$$

**4-я теория** — энергетическая теория (теория потенциальной энергии формоизменения)

$$\sigma^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.44)$$

В настоящее время для проверки балок на прочность по главным напряжениям чаще всего применяются третья теория (наибольших касательных напряжений) (8.43) и четвертая (энергетическая) теория прочности (8.44).

Однако на практике при расчете балок до сих пор сохранилось применение теории наибольших нормальных напряжений (8.41), дающей часто более экономичные размеры поперечных сечений.

Таким образом, для уточнения размеров поперечного сечения балки производится проверка прочности в отдельных его точках.

Например, для балок двутаврового сечения (рис. 8.29) такая проверка производится в точках 1—1 и 3—3 поперечного сечения по нормальным напряжениям (формулы (8.20) или (8.44)), в точках 4—4 и 5—5 — по главным напряжениям (формулы (8.41)–(8.44)), в точках 2—2 — по касательным напряжениям (формула (8.35)).

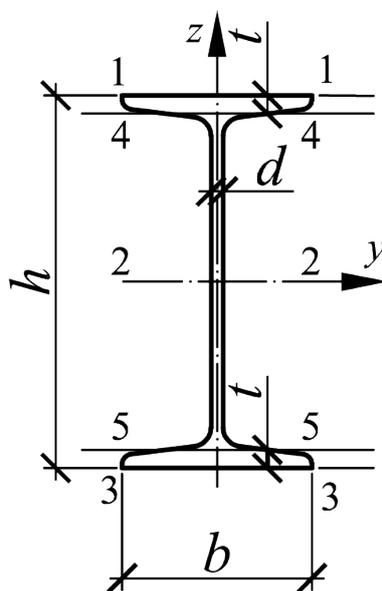


Рис. 8.29. Сечения балки, в которых производятся проверки прочности

## 8.22. Деформация балок. Основные понятия и определения

В предыдущих разделах были рассмотрены вопросы, относящиеся к расчету балок на прочность. Однако в большом количестве случаев практического расчета стержневых и рамных систем, работающих на изгиб, необходимо также производить их расчет на жесткость.

Под расчетом на жесткость понимается оценка упругой податливости плоских стержневых систем под действием нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать допусковых величин.

Для выполнения таких расчетов необходимо научиться вычислять перемещения поперечных сечений плоских стержневых систем под действием любой внешней нагрузки. Кроме этого, перемещения приходится определять и при расчете статически неопределимых конструкций.

Под действием внешних нагрузок балка деформируется и ее ось искривляется.

**Определение 8.23** *Плоская кривая, форму которой принимает ось балки при изгибе, называется изогнутой осью, или упругой линией.*

При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей.

Пренебрегая деформациями сдвига, можно считать угол поворота поперечного сечения балки  $\varphi$  равным углу между касательной, проведенной к изогнутой оси балки в этом сечении, и недеформированной осью балки, то есть углу поворота оси балки.

Допущение о малости перемещения позволяет считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны продольной (геометрической) оси недеформируемого бруса (рис. 8.30).

**Определение 8.24** *Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному геометрической оси балки, называется прогибом балки в данном сечении и обозначается буквой  $w$ .*

**Определение 8.25** *Наибольший прогиб называется стрелой прогиба и обозначается буквой  $f$ .*

Прогибы балки малы по сравнению с ее длиной, а поэтому их принято изображать в более крупном масштабе, чем длину оси.

Длина оси балки при изгибе остается неизменной, так как ось расположена в нейтральном слое, а нормальные напряжения в поперечных сечениях балки на уровне нейтрального слоя равны нулю.

Искривление оси балки вызывает не только прогибы, но и смещения точек оси балки по горизонтали.

Эти смещения, как правило, весьма малы не только с длиной балки, но и с прогибами ее оси; поэтому ими при расчете пренебрегают.

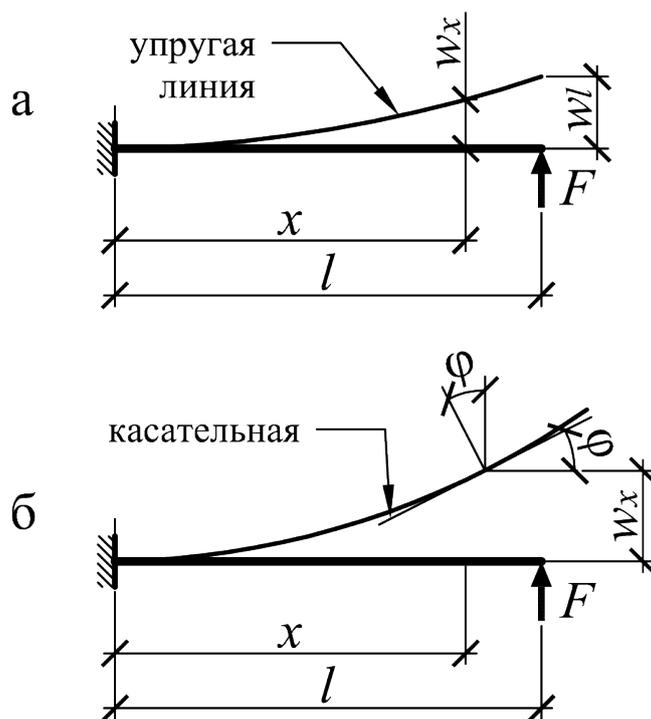


Рис. 8.30

**Определение 8.26** Угол  $\varphi$ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

Таким образом, при изгибе балок точки ее геометрической оси ( $x$ ) получают вертикальные перемещения или прогибы ( $w$ ), а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей ( $y$ ) на угол  $\varphi$  (рис. 8.31).

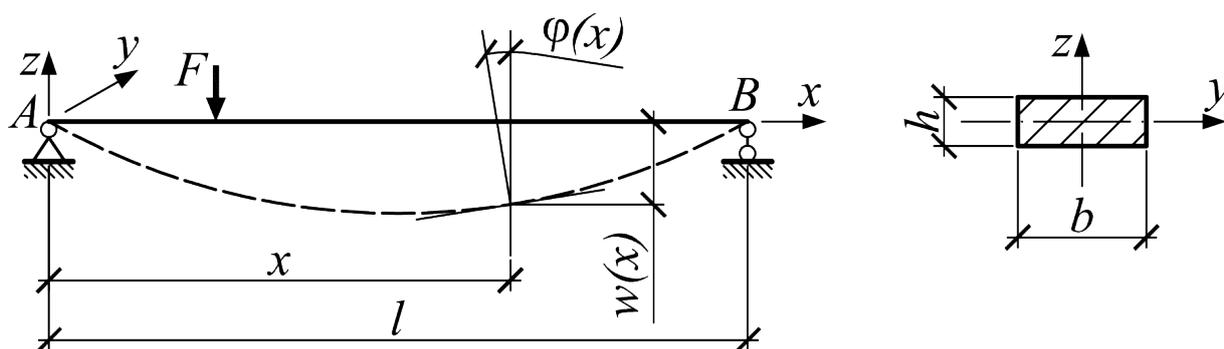


Рис. 8.31. Деформация балки при изгибе

**Определение 8.27** Прогибы ( $w$ ) и углы поворота ( $\varphi$ ) часто называют линейными и угловыми перемещениями соответственно.

Правило знаков. Прогиб ( $w$ ) считается положительным, если он происходит вверх — в сторону положительной оси ординат  $z$ . Угол поворота ( $\varphi$ ) считается положительным, если поперечное сечение поворачивается против хода часовой стрелки, когда ось абсцисс  $x$  направлена слева направо (на рис. 8.31  $w(x) < 0$ , а  $\varphi(x) > 0$ ).

Прогибы балок измеряются в единицах длины (сантиметрах или миллиметрах), а углы поворота — в градусах или радианах.

*Здесь и далее начало отсчета для координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  выбирается на левом конце балки.*

Теория деформации балок, изучаемая в курсе сопротивления материалов, основывается на следующих предположениях (гипотезах):

1. Материал балки подчиняется закону Гука ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ), то есть напряжения в балке не выходят за предел пропорциональности.

2. Размеры поперечных сечений балки невелики по сравнению с ее длиной.

3. Прогибы балки ( $w$ ) малы по сравнению с ее длиной  $L$  (расстоянием между опорами балки), то есть отношение наибольшего прогиба  $f$  к длине пролета  $L$  балки устанавливается в следующих пределах

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{100} - \frac{1}{1000},$$

где  $L$  — длина пролета балки (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

4. Углы поворота поперечных сечений ( $\varphi$ ) не превышают  $1^\circ$

$$|\varphi_{\max}| \leq 1^\circ = 0.0175 \text{ рад.}$$

### 8.23. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Выберем прямоугольную систему координат  $xoz$  с началом на левом конце оси балки. Ось  $x$  направим вправо (вдоль недеформированной оси балки), а ось  $z$  — вверх (рис. 8.31).

При таких условиях уравнение  $w = f(x)$  представляет собой уравнение кривой, по которой изогнется ось балки под нагрузкой. Это и будет уравнение изогнутой оси балки.

Касательная к изогнутой оси балки в рассматриваемом сечении составляет с осью  $x$  угол  $\varphi$ , то есть угол поворота поперечного сечения относительно первоначального положения.

Первая производная  $\frac{dw}{dx}$  от  $w = f(x)$  представляет собой тангенс угла  $\varphi$  между осью  $x$  и касательной к упругой линии

$$w'(x) = \operatorname{tg} \varphi(x).$$

Практически углы  $\varphi$  весьма малы. Они, как правило, менее 0,01 радиана, поэтому, в связи с малостью деформаций балок, можно считать, что

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi,$$

следовательно, можно записать

$$w'(x) = \operatorname{tg} \varphi(x) \approx \varphi(x),$$

то есть

$$\varphi = \frac{dw}{dx}. \quad (8.45)$$

*Угол поворота  $\varphi$  поперечного сечения балки равен первой производной по  $x$  от прогиба  $w$  в этом сечении.*

Для определения деформации балки в ее произвольном сечении необходимо получить уравнение упругой линии  $w = f(x)$ .

Исходя из физической природы изогнутой оси балки, можно считать, что упругая линия должна быть непрерывной и гладкой (без изломов) кривой.

Следовательно, на протяжении всей оси балки должны быть непрерывны функция  $w = f(x)$  и ее первая производная.

Плоскости двух смежных поперечных сечений деформированной балки, отстоящих друг от друга на расстоянии  $dx$ , пересекаются в центре кривизны участка  $dx$  оси балки. Расстояние  $\rho$  от центра кривизны до оси балки называется радиусом кривизны оси.

При определении напряжений в случае чистого изгиба была получена формула кривизны (8.13)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y}, \quad (8.46)$$

выражающая связь между радиусом кривизны оси балки, изгибающим моментом в поперечном сечении балки и жесткостью поперечного сечения при изгибе.

Величина  $EI_y$ , характеризующая сопротивляемость балки изменению ее первоначальной формы, называется жесткостью балки при изгибе.

Пренебрегая незначительным влиянием поперечной силы на величину деформаций, будем полагать эту формулу действительной и в общем случае плоского изгиба.

Из курса математического анализа известно уравнение кривизны плоской кривой

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.47)$$

Подставляя выражение (8.46) в формулу (8.47), получим

$$\frac{M}{EI_y} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.48)$$

*Мы получили точное дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки.*

Так как угол  $\varphi$  менее 0.01 радиана, то величиной  $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 0.0001$  можно пренебречь.

Тогда уравнение (8.48) принимает вид

$$\frac{M}{EI_y} = \pm \frac{d^2w}{dx^2} \quad (8.49)$$

или

$$w'' = \frac{M}{EI_y}. \quad (8.50)$$

*Мы получили приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки.*

Правила знаков для изгибающего момента установлены независимо от направления координатных осей (*изгибающий момент  $M$*  в поперечном сечении балки считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки).

Вторая же производная положительна, если в сторону положительного направления оси  $z$  обращена *вогнутость кривой*, и отрицательна — если выпуклость кривой (рис.8.32).

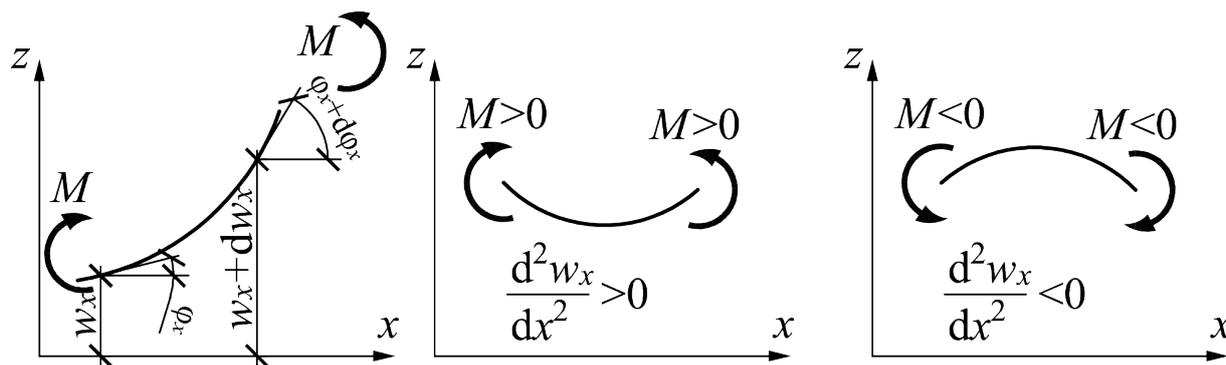


Рис. 8.32. Деформация балки при изгибе

При принятом правиле знаков для изгибающего момента, положительной второй производной соответствует положительный момент, а поэтому в формуле (8.50)

$$w'' = \pm \frac{M}{EI_y}$$

необходимо брать знак «плюс»

$$EI_y \cdot w'' = M. \quad (8.51)$$

Полученное уравнение называется *основным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки*.

Уравнение изогнутой оси балки (8.51) иногда удобно записать в иной форме, считая заданным не изгибающий момент  $M$ , а интенсивность внешней распределенной нагрузки.

Известно, что (8.5)

$$q = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

В результате получим

$$EI_y \cdot w''' = \frac{dM_{(x)}}{dx} = Q_{(x)}; \quad EI_y \cdot w^{IV} = \frac{dQ_{(x)}}{dx} = q_{(x)}.$$

## 8.24. Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Этот метод заключается в том, что для каждого участка балки составляют выражение изгибающего момента, которое подставляют в *основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки* (8.51), и интегрируют два раза.

Проинтегрировав выражение (8.51) (для балки постоянного поперечного сечения), получим уравнение углов поворота сечений балки

$$EI_y \cdot w' = \int M \cdot dx + C.$$

Интегрируя второй раз, получаем уравнение прогибов (уравнение упругой линии)

$$EI_y \cdot w = \int dx \int M \cdot dx + C \cdot x + D.$$

При этом после каждого интегрирования появится некоторая постоянная величина и, следовательно, окончательный результат на каждом участке балки будет содержать *две постоянные неизвестные величины*.

Неизвестные произвольные постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определяют из граничных условий (*из условий закрепления балки*) и на границах смежных участков.

Граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и составляются относительно прогибов и углов поворота.

Так, например, для шарнирно опертой балки (рис. 8.33) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах

$$w_B = 0 \quad \text{и} \quad w_D = 0 \quad (8.52)$$

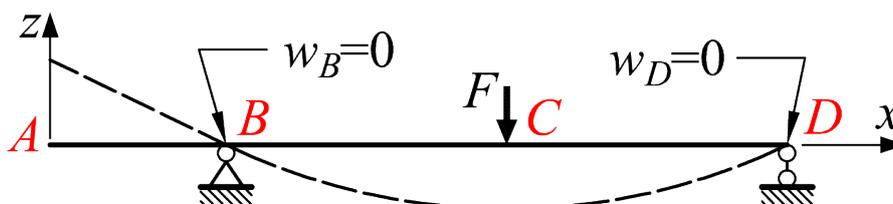


Рис. 8.33. Шарнирно опертая балка

Для жестко заземленной балки (рис. 8.34) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов и углов поворота в заделке

$$w_A = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_A = 0. \quad (8.53)$$

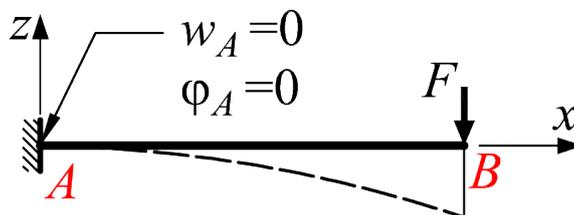


Рис. 8.34. Жестко заземленная балка

На границах двух смежных участков (рис. 8.35) прогиб и угол поворота для левого и правого участков равны между собой

$$w_{\text{лев}} = w_{\text{прав}}; \quad \varphi_{\text{лев}} = \varphi_{\text{прав}}. \quad (8.54)$$

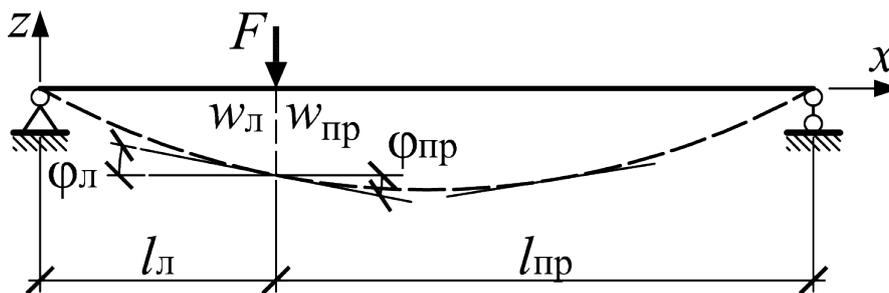


Рис. 8.35

В каждом конкретном случае необходимо выбрать то или иное граничное условие.

Рассмотрим балку, жестко заделанную правым концом и нагруженную на свободном конце сосредоточенной силой  $F$ , линия действия которой совпадает с вертикальной главной осью поперечного сечения балки.

Определим прогиб и угол поворота поперечного сечения балки на ее свободном левом конце (рис. 8.36).

Балка имеет один участок.

Изгибающий момент в сечении балки с абсциссой  $x$  равен

$$M = -F \cdot x.$$

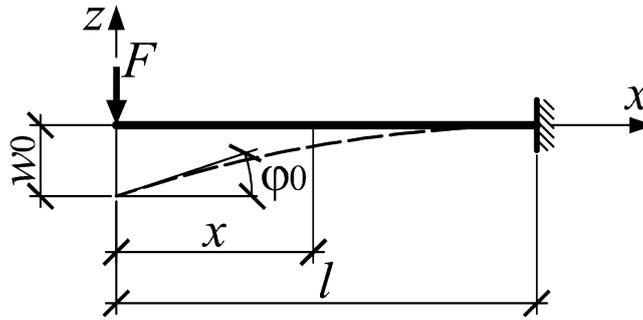


Рис. 8.36

Подставив это выражение в дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (8.51), получим

$$EI_y \cdot w'' = -F \cdot x.$$

Проинтегрируем это уравнение дважды

$$EI_y w' = EI_y \varphi = -F \left( \frac{x^2}{2} \right) + C; \quad EI_y w = -F \left( \frac{x^3}{6} \right) + Cx + D.$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определим из условий закрепления правого конца балки. Здесь (при  $x = l$ ) прогиб  $w_l$  и угол поворота сечения  $\varphi_l$  равны нулю.

Подставим значения  $x = l$  в выражения для  $w$  и  $\varphi$ , получим значения постоянных интегрирования и уравнения для определения углов поворота и прогибов для этой балки

$$C = \frac{F \cdot l^2}{2}; \quad D = -\frac{F \cdot l^3}{3} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \varphi = \frac{F}{2} (l^2 - x^2); \quad w = -\frac{F}{6} (2l^3 - 3l^2x + x^3). \quad (8.55)$$

По этим уравнениям можно определить прогиб  $w$  и угол поворота  $\varphi$  любого поперечного сечения этой балки с координатой  $x$ .

Прогиб свободного конца балки и угол поворота сечения ( $x = 0$ ) будут равны

$$w_{(0)} = w_{\max} = -\frac{Fl^3}{3EI_y}; \quad (8.56)$$

$$w'_{(0)} = \varphi_{(0)} = \frac{Fl^2}{2EI_y}. \quad (8.57)$$

Сравнивая выражения для  $C$  и  $D$  (8.55) с выражениями (8.56) и (8.57) для прогиба и угла поворота в начальном сечении ( $x = 0$ ), видим, что  $C$  равно начальному углу поворота, а  $D$  равно начальному прогибу (с множителем  $EI_y$ ).

*Таков физический смысл произвольных постоянных интегрирования для любой балки при произвольной нагрузке.*

Если на балку будут действовать несколько внешних сил, приложенных в разных ее сечениях, то применяя этот метод к отдельным участкам балки, получим в результате систему уравнений с большим числом неизвестных.

## **8.25. Правила уравнивания одноимённых постоянных интегрирования. Правила Клебша**

Если балка имеет несколько участков, то для каждого из них выражения для изгибающего момента будут различными.

Следовательно, для каждого участка должно быть составлено и дважды проинтегрировано дифференциальное уравнение упругой линии балки. При этом на каждом участке будет по две неизвестных постоянных интегрирования.

Для их определения к двум опорным условиям балки должны быть добавлены условия плавного и непрерывного сопряжения участков балки между собой. Эти дополнительные условия выражают отсутствие разрывов и изломов упругой линии балки на границах участков (8.54).

*Применяя правила Клебша можно добиться равенства между собой одноименных постоянных интегрирования на всех соседних участках.*

То есть

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n; \quad D_1 = D_2 = D_3 = \dots = D_n. \quad (8.58)$$

Для уравнивания между собой одноименных постоянных интегрирования на всех соседних участках необходимо непременно выполнить следующие требования Клебша:

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят, положительное направление оси  $z(w)$  — вверх.

2. При включении в уравнение внешнего сосредоточенного момента  $M_n$  его необходимо умножать на множитель  $(x - a)^0$ , равный единице. Здесь  $a$  — координата сечения, в котором приложен сосредоточенный момент.

3. Интегрирование дифференциальных уравнений на всех участках балки выполняется без раскрытия скобок, то есть по новой переменной  $(x - a)$ .

Следовательно, выражение  $F \cdot (x - a_n) \cdot dx$  заменяется выражением  $F \cdot (x - a_n) \cdot d(x - a_n)$ .

Отсюда,

$$\int F(x - a_n) dx = \int F(x - a_n) d(x - a_n) = \frac{F \cdot (x - a_n)^2}{2} + C.$$

Выражение  $M_n \cdot dx$  заменяется выражением  $M_n \cdot (x - a_n)^0 \cdot d(x - a_n)$ .

Отсюда,

$$\int M_n dx = \int M_n (x - a_n)^0 d(x - a_n) = M_n (x - a_n) + C.$$

4. При действии на балку распределенной нагрузки, не доходящей до правого конца балки, ее необходимо продолжить до правого концевое сечения, одновременно уравновешивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано на рис. 8.37.

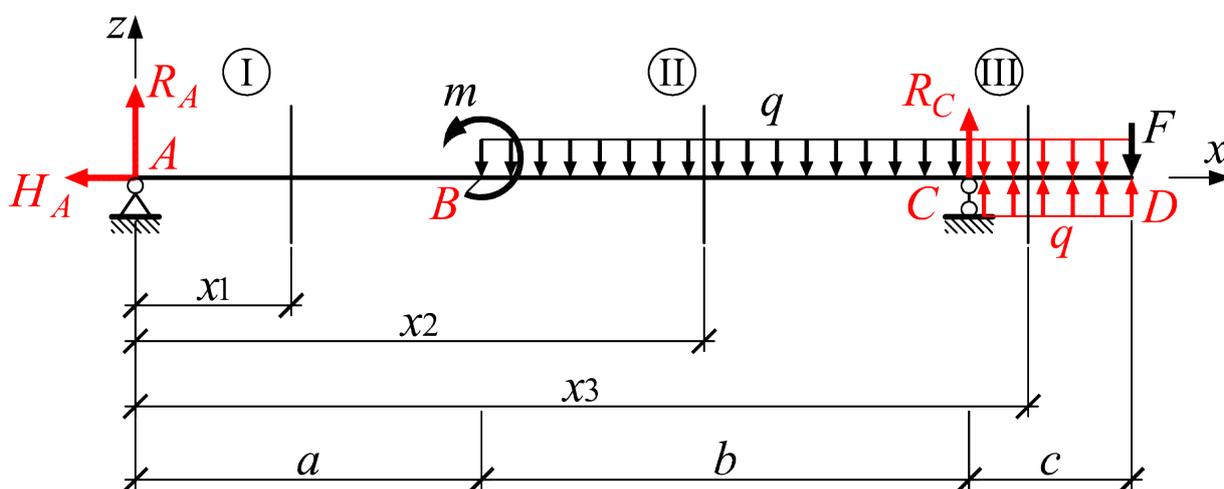


Рис. 8.37. Требования Клебша

Для расчета балок на жесткость (определение перемещений в плоских стержневых системах) в курсе сопротивления материалов обычно изучают метод начальных параметров и метод Мора (интеграл Мора) с использованием правила Верещагина (правила «перемножения» эпюр).

Метод начальных параметров удобно применять в том случае, когда необходимо определить перемещения в нескольких сечениях балки. Основным недостатком этого метода является то, что его можно применять только для расчета балок.

Метод Мора, в отличие от метода начальных параметров, является универсальным. Его можно применять для определения перемещений любых объектов — балок, плоских и пространственных рам, арок и др.

## 8.26. Метод начальных параметров

Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси для балок с большим количеством участков сопряжено с большими трудностями. Задача определения прогибов и углов поворота может быть значительно упрощена, если применять так называемое универсальное уравнение изогнутого бруса (метод начальных параметров).

Академиком А. Н. Крыловым подобная задача была решена в общем виде для балки, условно нагруженной всеми возможными типами внешних нагрузок.

Метод начальных параметров не требует составления выражений изгибающих моментов и дифференцирования уравнений. Число неизвестных постоянных, подлежащих определению, не превышает двух, независимо от числа участков балки.

По методу начальных параметров прогиб в любом сечении балки определяется через перемещения и силовые факторы, взятые в начале координат, с учетом приложенной к балке нагрузки.

Рассмотрим балку постоянного поперечного сечения ( $EI_y = \text{const}$ ), нагруженную произвольной внешней нагрузкой (рис. 8.38).

Правило знаков. Условимся считать направления внешних нагрузок, показанных на рис. 8.38, положительными.

*Будем выполнять требования Клебша.*

Разобьем балку на ряд участков таким образом, чтобы на протяжении каждого участка изгибающий момент выражался с помощью непрерывной функции.

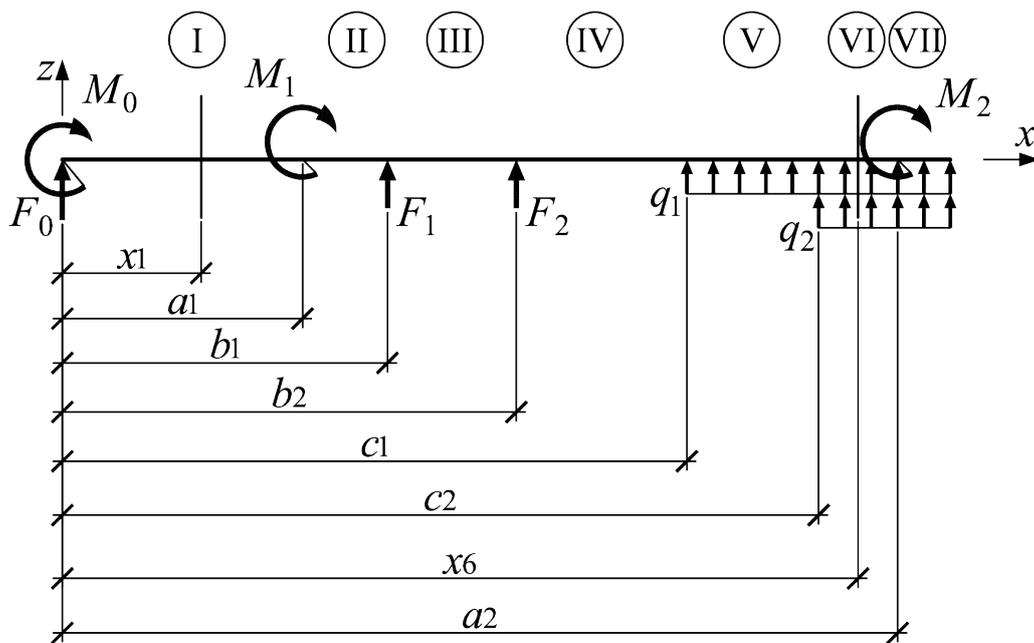


Рис. 8.38

Рассмотрим первый участок, прилегающий к началу координат.

**1 участок:**  $0 \leq x \leq a$  (начало отсчета на левой границе участка).

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M_1 = M(x_1) = M_0 + F_0 \cdot x_1.$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси для этого участка балки имеет вид

$$w_1'' = \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{M_1}{EI_y}.$$

Следовательно,

$$w_1'' = \frac{1}{EI_y} \cdot [M_0 + F_0 \cdot x_1].$$

Проинтегрируем это уравнение дважды

$$w_1' = \varphi(x_1) = \frac{1}{EI_y} \cdot \left[ M_0 \cdot x_1 + F_0 \cdot \frac{x_1^2}{2} \right] + C_1;$$

$$w_1 = w(x_1) = \frac{1}{EI_y} \cdot \left[ M_0 \cdot \frac{x_1^2}{2} + F_0 \cdot \frac{x_1^3}{6} \right] + C_1 \cdot x_1 + D_1.$$

Подставив  $x_1 = 0$  в выражения для  $w_1'$  и  $w_1$ , получим значения произвольных постоянных интегрирования

$$w_1' = \varphi(0) = \varphi_0 = C_1,$$

то есть

$$C_1 = \varphi_0. \quad (8.59)$$

$$w_1 = w(0) = w_0 = D_1,$$

то есть

$$D_1 = w_0. \quad (8.60)$$

В этих формулах  $w_0$  и  $\varphi_0$  — прогиб и угол поворота поперечного сечения, расположенного в начале координат (в крайнем левом сечении балки).

Аналогично рассмотрим еще один произвольный участок балки, например 6-й участок.

**6 участок:**  $c_2 \leq x_6 \leq a_2$  (начало отсчета на левой границе участка).

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M_6 = M(x_6) = M_0 + F_0 \cdot x_6 + M_1 \cdot (x_6 - a_1)^0 + F_1 \cdot (x_6 - b_1) + \\ + F_2 \cdot (x_6 - b_2) + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^2}{2} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^2}{2}.$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси для этого участка балки имеет вид

$$w_6'' = \frac{1}{EI_y} \cdot \left[ M_0 + F_0 \cdot x_6 + M_1 \cdot (x_6 - a_1)^0 + F_1 \cdot (x_6 - b_1) + \\ + F_2 \cdot (x_6 - b_2) + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^2}{2} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^2}{2} \right].$$

Проинтегрируем это уравнение дважды

$$w_1' = \varphi(x_6) = \frac{1}{EI_y} \cdot \left[ M_0 \cdot x_6 + F_0 \cdot \frac{x_6^2}{2} + M_1 \cdot (x_6 - a_1) + F_1 \cdot \frac{(x_6 - b_1)^2}{2} + \\ + F_2 \cdot \frac{(x_6 - b_2)^2}{2} + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^3}{6} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^3}{6} \right] + C_6;$$

$$w_1 = w(x_6) = \frac{1}{EI_y} \cdot \left[ M_0 \cdot \frac{x_6^2}{2} + F_0 \cdot \frac{x_6^3}{6} + M_1 \cdot \frac{(x_6 - a_1)^2}{2} + F_1 \cdot \frac{(x_6 - b_1)^3}{6} + \\ + F_2 \cdot \frac{(x_6 - b_2)^3}{6} + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^4}{24} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^4}{24} \right] + C_6 \cdot x_6 + D_6.$$

Так как мы выполнили все требования Клебша, то имеем право записать, учитывая (8.59) и (8.60), что

$$C_1 = C_2 = \dots = C_6 = \dots = C_n = \varphi_0; \quad D_1 = D_2 = \dots = D_6 = \dots = D_n = w_0. \quad (8.61)$$

Следовательно, окончательно для  $n$ -го участка балки можно записать, расставив слагаемые в правой части в порядке возрастания степени

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 \cdot x + M_0 \cdot \frac{x^2}{2EI_y} + F_0 \cdot \frac{x^3}{6EI_y} + \sum M_i \cdot \frac{(x - a_i)^2}{2EI_y} + \sum F_j \cdot \frac{(x - b_j)^3}{6EI_y} + \sum q_k \cdot \frac{(x - c_k)^4}{24EI_y}. \quad (8.62)$$

Мы получили универсальное уравнение изогнутой оси балки, выраженное через начальные параметры  $w_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $M_0$  и  $F_0$ .

Так как

$$\varphi = \frac{dv}{dx},$$

то, продифференцировав это универсальное уравнение изогнутой оси балки по  $x$ , получим универсальное уравнение для углов поворота

$$\varphi(x) = \varphi_0 + M_0 \cdot \frac{x}{EI_y} + F_0 \cdot \frac{x^2}{2EI_y} + \sum M_i \cdot \frac{(x - a_i)}{EI_y} + \sum F_j \cdot \frac{(x - b_j)^2}{2EI_y} + \sum q_k \cdot \frac{(x - c_k)^3}{6EI_y}. \quad (8.63)$$

В этих формулах:

$w(x)$  — величина прогиба в произвольном сечении балки на расстоянии  $x$  от начала отсчета;

$w_0$ ,  $\varphi_0$  — прогиб и угол поворота поперечного сечения балки в начале системы координат (кинематические начальные параметры);

$M_0$ ,  $F_0$  — сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат (статические начальные параметры);

$M_i$  — сосредоточенный момент на расстоянии  $a_i > 0$  от начала координат;

$F_j$  — сосредоточенная сила на расстоянии  $b_j > 0$  от начала координат;

$q_k$  — интенсивность распределенной нагрузки, которая начинается на расстоянии  $c_k \geq 0$  от начала координат;

$EI_y$  — жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Статические начальные параметры  $M_0$  и  $F_0$  (сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат) могут быть известны (внешняя нагрузка) или должны быть определены из условий статики (опорные реакции).

Неизвестные кинематические начальные параметры  $w_0$  и  $\varphi_0$  определяются из условий закрепления балки (кинематические граничные условия).

Кинематические граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и состояются относительно прогибов и углов поворота.

Так, например, для шарнирно опертой балки граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах (рис. 8.39)

$$w_A = 0 \quad \text{и} \quad w_B = 0.$$

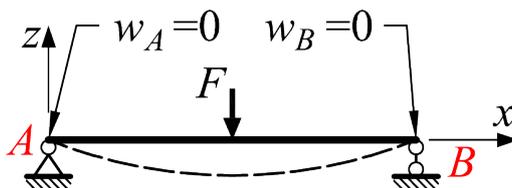


Рис. 8.39. Шарнирно опертая балка

Для жестко заземленной балки граничные условия характеризуют отсутствие прогибов и углов поворота в заделке (рис. 8.40)

$$w_A = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_A = 0.$$

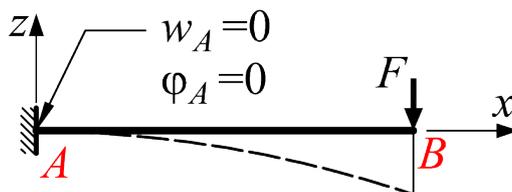


Рис. 8.40. Жестко заземленная балка

Таким образом, для определения прогибов и углов поворота в произвольных поперечных сечениях балок методом начальных параметров достаточно лишь знаний величин прогиба  $v_0$  и угла поворота  $\varphi_0$  в начале системы координат, то есть так называемых кинематических начальных параметров. Поэтому данный метод называется *методом начальных параметров*.

Применение метода начальных параметров требует неперменного выполнения следующих требований Клебша:

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят, положительное направление оси  $z(w)$  — вверх.

2. При действии распределенной нагрузки, не доходящей до правого конца балки, ее необходимо продолжить до правого концевое сечения, одновременно уравновешивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано на рис. 8.37.

Нагрузки ( $M_0$ ,  $F_0$ ,  $M_i$ ,  $F_j$ ,  $q_k$ ) считаются положительными, если они направлены так, как показано на рис. 8.41, и отрицательными — в противном случае.

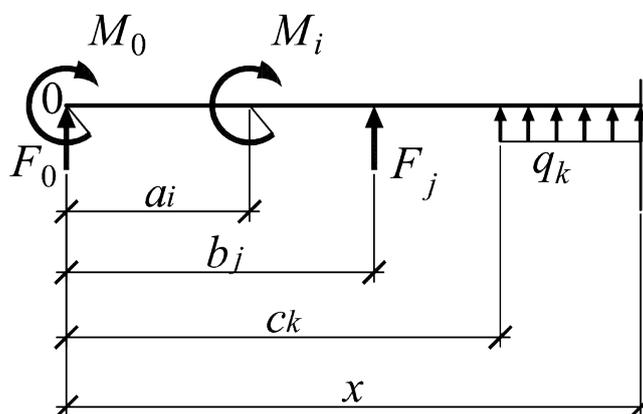


Рис. 8.41. Правила знаков метода начальных параметров

После того, как будут найдены все начальные параметры, можно написать окончательные уравнения прогибов, а продифференцировав их, и углов поворота для каждого участка балки.

Придавая величине  $x$  ряд значений, и вычисляя в соответствующих характерных точках численные значения прогибов и углов поворота, можно построить *эпюры прогибов и углов поворота оси балки*.

## 8.27. Проверка правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов

Из теории изгиба балок известно, что величины  $Q$ ,  $M$ ,  $\varphi$  и  $w$  связаны между собой дифференциальными зависимостями

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_y}; \quad \frac{dw}{dx} = \varphi(x); \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EI_y}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M(x)}{EI_y}. \quad (8.64)$$

На основании этих зависимостей строятся правила построения и контроля эпюр углов поворота и прогибов:

1. Если изгибающий момент на каком-то участке балки положительный ( $M > 0$ ), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз.

2. Если изгибающий момент на каком-то участке балки отрицательный ( $M < 0$ ), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.

3. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ( $M = 0$ ) (при смене знака) или имеет «скачок» (при смене знака), то на эпюре прогибов в этом сечении наблюдаем точку перегиба (т. п.).

4. Если угол поворота в каком-то сечении балки равен нулю ( $\varphi = 0$ ) (при смене знака), то на эпюре прогибов этом сечении наблюдаем точку экстремума (т. э.).

5. Если поперечная сила на каком-то участке балки положительная ( $Q > 0$ ), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз. Если поперечная сила на каком-то участке балки отрицательная ( $Q < 0$ ), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.

6. Если поперечная сила в каком-то сечении балки равна нулю ( $Q = 0$ ) (при смене знака) или имеет «скачок» (при смене знака), то на эпюре углов поворота в этом сечении балки наблюдаем точку перегиба (т. п.).

7. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ( $M = 0$ ) (при смене знака) или имеет «скачок» (при смене знака), то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку экстремума (т. э.).

8. Если на эпюре изгибающих моментов в каком-то сечении балки наблюдается «скачок», то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку излома (т. и.).

### 8.28. Расчет балок на жесткость. Проверка выполнения условия жесткости балки

**Определение 8.28** Сечение, в котором перемещение (прогиб балки) принимает максимальное по абсолютной величине значение  $f$ , называется опасным сечением балки из условия жесткости.

Условие жесткости при изгибе имеет вид

$$f \leq [f], \quad (8.65)$$

где  $f$  — стрела прогиба (максимальное по абсолютной величине значение прогиба);

$[f]$  — величина допускаемого прогиба.

Для проверки выполнения условия жесткости балки из эпюры прогибов определяется в опасном сечении балки максимальное по абсолютной величине значение прогиба  $|w_{\max}| = f$ , которое подставляется в условие (8.65).

Величина допускаемого прогиба  $[f]$  для реальных сооружений приведена в СП и СНиП и может изменяться в довольно широком диапазоне

$$[f] = \frac{L}{100} - \frac{L}{1000},$$

где  $L$  — длина пролета (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

Обычно условие жесткости балки (8.65) выполняется.

В противном случае, из условия жесткости  $f \leq [f]$  необходимо определить величину  $I_y^{\text{треб}}$  и подобрать новые размеры поперечного сечения балки.

Чтобы одновременно выполнялись условие прочности и условие жесткости, необходимо окончательно выбрать бóльшее сечение.

## 8.29. Раскрытие статической неопределимости упругих стержневых систем

Закрепления, необходимые для кинематической неизменяемости системы, обеспечиваются либо защемлением одного из концов балки, либо двумя шарнирными опорами, из которых одна неподвижная, а другая подвижная, то есть наименьшее число связей, не позволяющих балке (раме) перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.

В этом случае три неизвестные опорные реакции определяются из условий равновесия (статики).

*Такие балки называются статически определенными.*

В инженерной практике очень часто, по условиям работы конструкции, оказывается необходимым увеличить число опорных закреплений. В этом случае число наложенных связей (число неизвестных опорных реакций) больше числа уравнений равновесия (статики).

Для расчета таких систем на прочность и жесткость, так же как и в рассмотренных ранее статически определенных задачах, необходимо построить обычным способом эпюры внутренних усилий, прогибов и углов поворота, а для этого необходимо предварительно определить все опорные реакции.

*Такие системы называются статически неопределимыми.*

**Определение 8.29** *Статически неопределимые системы — это упругие стержневые системы, у которых число неизвестных опорных реакций превышает число независимых уравнений равновесия (уравнений статики), возможных для этой системы.*

В этих системах, используя только уравнения равновесия, невозможно определить ни реакции опор, ни внутренние усилия, возникающие в элементах конструкций.

Исключение составляют многопролетные балки (состоящие из нескольких отдельных балок, соединенных между собой промежуточными шарнирами), которые могут быть статически определенными и при числе наложенных связей больше трех.

*Степень статической определенности (неопределимости) простых стержневых систем обычно определяется как разность между количеством*

неизвестных опорных реакций и количеством уравнений равновесия (уравнений статики), которые можно составить для данной системы.

На рис. 8.42, а и в изображены две статически неопределимые балки, на каждую из которых наложены четыре внешние связи.

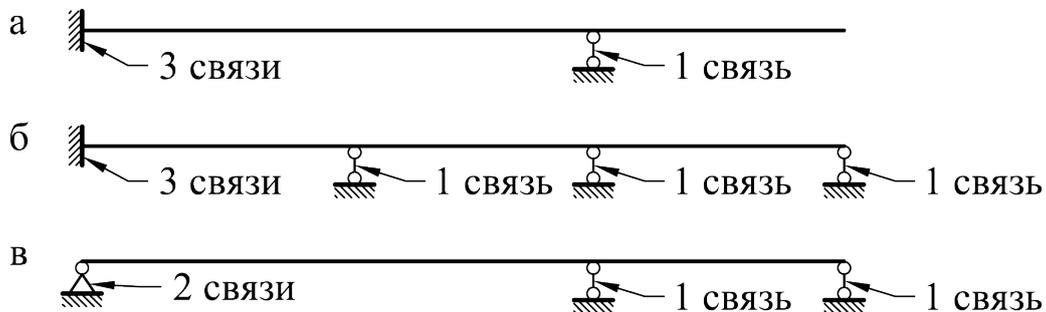


Рис. 8.42. Правила знаков метода начальных параметров

Следовательно, эти балки один раз статически неопределимы.

На рис. 8.42, б показана балка с шестью наложенными внешними связями, следовательно, она три раза статически неопределима.

**Определение 8.30** Степень статической неопределимости балки, не имеющей промежуточных шарниров, соединяющих друг с другом отдельные элементы балки, равна избыточному (лишнему) числу внешних связей (сверх трех).

Статически неопределимые балки часто называют неразрезными балками.

Степень статической определимости (неопределимости) сложных стержневых систем определяется числом «лишних» связей по формуле

$$S = 3k - ш, \quad (8.66)$$

где  $k$  — число замкнутых контуров в конструкции в предположении отсутствия шарнирных соединений (рис. 8.43);

$ш$  — число одиночных шарниров.

Так для шарнирно–неподвижной опоры (опора  $D$  на рис. 8.43) число одиночных шарниров — 1, для шарнирно–подвижной опоры (например, опора  $A$  на рис. 8.43) число одиночных шарниров — 2.

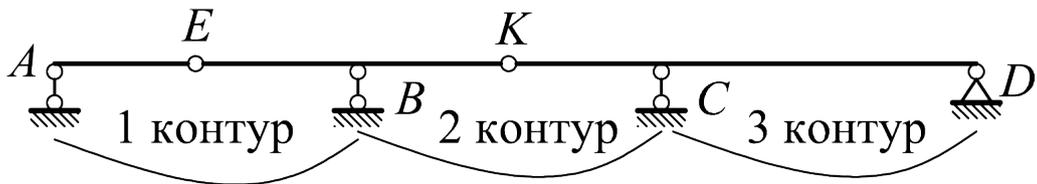


Рис. 8.43. Статически определимая многопролетная балка

Для сложного шарнира число одиночных шарниров определяется по формуле

$$\text{ш} = \text{с} - 1,$$

где  $\text{с}$  — число стержней, подходящих к шарниру.

На рис. 8.43 шарниры  $E$  и  $K$  — одиночные, так как к каждому из них подходит по два стержня.

Если  $S = 0$ , то задача статически определимая. При  $S > 0$  задача статически неопределимая, а при  $S < 0$  — система геометрически изменяемая.

Так на рис. 8.43 балка имеет три замкнутых контура ( $\text{к} = 3$ ) и девять одиночных шарниров ( $\text{ш} = 9$ ), поэтому  $S = 3\text{к} - \text{ш} = 3 \cdot 3 - 9 = 0$ , следовательно, эта балка статически определимая.

Для определения всех неизвестных опорных реакций статически неопределимой системы составляют дополнительные уравнения, выражающие условия ее закрепления на опорах (рис. 8.39 и 8.40).

Эти дополнительные уравнения условно называют *уравнениями перемещений* или *уравнениями совместности деформаций*.

Количество дополнительных уравнений перемещений, необходимых для раскрытия статической неопределимости, должно быть равно степени статической неопределимости системы.

Совместное решение уравнений равновесия и уравнений перемещений позволяет определить все неизвестные опорные реакции. Этот этап решения задачи называется раскрытием статической неопределимости системы.

**Определение 8.31** *Раскрыть статическую неопределимость системы — это значит определить численные значения всех опорных реакций.*

Определив все опорные реакции, можно обычным путем построить эпюры внутренних усилий, а также определить величину вертикального

перемещения и угла поворота любого сечения балки так же, как это делается в статически определимых балках.

### **8.30. Порядок решения статически неопределимых задач**

Статически неопределимые конструкции рассчитываются, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи. При этом придерживаются следующего порядка:

1. *Статическая сторона задачи.* Определяется степень статической неопределимости системы. Составляются уравнения равновесия, содержащие неизвестные опорные реакции системы.

2. *Геометрическая сторона задачи.* Рассматриваются кинематические граничные условия (условия на опорах), отражающие характер закрепления (опирания) системы, и записываются уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений).

3. *Физическая сторона задачи.* На основании закона Гука (например, уравнения метода начальных параметров, которое получено на основе закона Гука) уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений) выражаются через неизвестные опорные реакции.

4. *Синтез уравнений.* Решая совместно систему уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи, определяются численные значения всех опорных реакций.

Существует много методов раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем. Для балок постоянного поперечного сечения, нагруженных всеми возможными типами нагрузок, при произвольном количестве участков, раскрытие статической неопределимости и определение прогибов целесообразно производить, применяя универсальное уравнение метода начальных параметров.

### 8.31. Потенциальная энергия деформации балок

Кроме рассмотренных способов вычисления прогибов и углов поворота сечений балок существует более общий метод, пригодный для определения деформаций любых упругих конструкций. Он основан на применении закона сохранения энергии.

Под действием внешних сил тела деформируются. Эта деформация протекает постепенно, возрастая от нуля до какого — то конечного значения, в зависимости от величины, действующей на тело нагрузки. При изучении деформаций считают, что нагрузки к телам прикладывается статически, то есть так, что от нуля до своего конечного значения они возрастают постепенно, медленно меняясь по закону прямой.

При таком способе нагрузки упругого тела можно считать, что тело не испытывает никаких ускорений, а следовательно, и никаких других сил, кроме прикладываемой к нему статической нагрузки.

Под воздействием внешних сил тело, деформируясь, накапливает в себе (аккумулирует) определенное количество энергии, называемое *потенциальной энергией деформации*  $U$ .

Потенциальная энергия деформации  $U$  возникает в упругом брус за счет работы внешних сил  $A$ . В процессе упругой деформации наблюдается переход одного вида потенциальной энергии в другой, а именно: в рассматриваемом случае потенциальная энергия действующих на брус нагрузок переходит в потенциальную энергию деформации бруса.

Полагая, что закон сохранения энергии полностью распространяется на рассматриваемое явление (образование потенциальной энергии деформации тела), можно считать, что потенциальная энергия деформации  $U$  упругого тела численно равна работе внешних сил  $A$ , то есть

$$U = A. \quad (8.67)$$

В общем случае изгибающий момент  $M_{(x)}$  является величиной переменной.

В любом сечении ему может сопутствовать поперечная сила  $Q_{(x)}$ . Поэтому рассматривать следует не всю балку в целом, а лишь бесконечно малый элемент балки длиной  $dx$  (рис. 8.44).

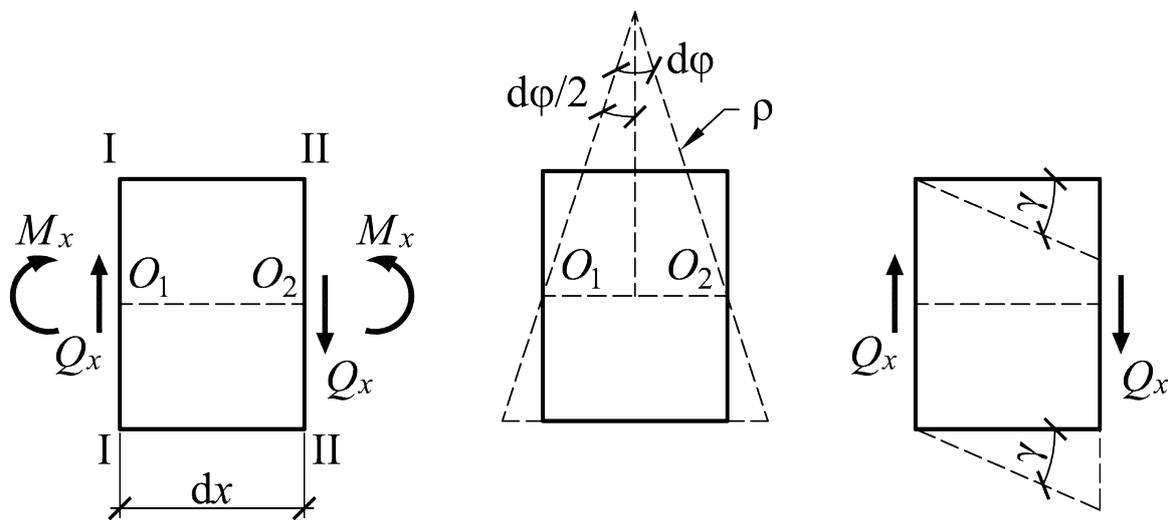


Рис. 8.44

Под действием изгибающих усилий сечения элемента поворачиваются и образуют между собой угол  $d\varphi$ . Касательные же усилия стремятся вызвать перекос элемента. Таким образом, перемещения от нормальных напряжений идут перпендикулярно к направлению касательных напряжений, и наоборот.

Это позволяет независимо вычислять работу изгибающих и касательных усилий.

Обычно работа касательных усилий оказывается малой по сравнению с работой нормальных и ею, как правило, пренебрегают.

Элементарная работа нормальных усилий равна

$$dA_F = dU = \frac{1}{2} M_{(x)} d\varphi.$$

С искривлением оси балки связан взаимный поворот сечений. Длина отрезка  $O_1O_2$  равна

$$O_1O_2 = dx = \rho d\varphi.$$

Отсюда угол поворота двух смежных сечений

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho}.$$

При определении напряжений в случае чистого изгиба была получена формула кривизны (8.13)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y},$$

выражающая связь между радиусом кривизны оси балки, изгибающим моментом в поперечном сечении балки и жесткостью поперечного сечения при чистом изгибе.

Пренебрегая незначительным влиянием поперечной силы  $Q$  на величину деформаций, будем полагать эту формулу действительной и в общем случае плоского изгиба, то есть

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EI}.$$

В этом случае

$$d\varphi = \frac{M_{(x)} dx}{EI}. \quad (8.68)$$

Следовательно, поворот сечений  $d\varphi$  и кривизна оси балки  $\frac{1}{\rho}$  прямо пропорциональны величине изгибающего момента и обратно пропорциональны жесткости балки  $EI$ .

Тогда выражение для потенциальной энергии примет вид

$$dU = \frac{M_{(x)}^2 dx}{2EI}. \quad (8.69)$$

Полная потенциальная энергия изгиба получится суммированием по длине балки

$$U = \int_l \frac{M_{(x)}^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \int_l M_{(x)}^2 dx. \quad (8.70)$$

Полученная формула справедлива для балки постоянной жесткости  $EI$ .

При выводе этой формулы мы пренебрегли величиной потенциальной энергии деформации сдвига, возникающей от действия поперечной силы  $Q$ , так как влияние ее, соответственно вычислениям, в подавляющем большинстве случаев мало.

Полученная формула (8.70) для определения потенциальной энергии деформации балки при изгибе может быть использована при решении задач по определению деформаций балок.

В случае балки с несколькими участками, интеграл (8.70) разбивается на сумму интегралов

$$U = \frac{1}{2EI} \sum_1^n \int_{l_i} M_{(x_i)}^2 dx. \quad (8.71)$$

### 8.32. Метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации

Установим метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации. В основе этого метода лежит теорема Кастильяно.

**Определение 8.32** Производная потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению (теорема Кастильяно).

**Определение 8.33** Обобщенной силой называют любую нагрузку, вызывающую деформацию.

**Определение 8.34** Перемещение, соответствующее этой обобщенной силе, называют обобщенным перемещением.

Соответствие заключается в том, что речь идет о перемещении сечения, где приложена сила, причем о таком перемещении, произведение которого на эту силу дает работу.

Для сосредоточенной силы, приложенной в сечении балки, за обобщенное перемещение принимают прогиб в том сечении, где приложена сила.

Для изгибающей пары сил за обобщенное перемещение принимают угол поворота сечения в том сечении, где приложена пара сил.

В случае сплошной равномерно распределенной по всему пролету балки нагрузки обобщенным перемещением является площадь, заключенная между первоначальной осью балки и осью изогнутой балки.

Исследуем метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации.

Рассмотрим балку, на которую действуют в разных сечениях сосредоточенные силы и пары сил (рис. 8.45).

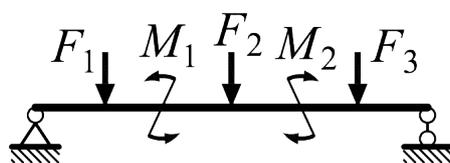


Рис. 8.45

Для случая изгиба имеем формулу полной потенциальной энергии (8.70)

$$U = \int_l \frac{M_{(x)}^2 dx}{2EI},$$

связывающую величину потенциальной энергии  $U$  с изгибающими моментами.

Вычислим частную производную от  $U$  по одной из внешних сил, например  $F_1$ . Получим

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{\partial}{\partial F_1} \left[ \int_l \frac{M_{(x)}^2 dx}{2EI} \right].$$

Имеем случай дифференцирования определенного интеграла по параметру.

При этом,  $M_x$  — функция, интегрирование которой проводится по  $x$ , а дифференцирование — по параметру  $F_1$ .

Как известно, если пределы интеграла постоянные, то следует просто дифференцировать подынтегральную функцию.

Таким образом, прогиб в точке приложения сосредоточенной силы  $F_1$  равен

$$w_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1} = \int_l \frac{M_{(x)} dx}{EI} \frac{\partial M_{(x)}}{\partial F_1}. \quad (8.72)$$

Угол поворота сечения с парой  $M_1$  равен

$$\varphi_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \int_l \frac{M_{(x)} dx}{EI} \frac{\partial M_{(x)}}{\partial M_1}. \quad (8.73)$$

Если требуется определить линейное или угловое перемещение в точке, где по условию задачи обобщенная сила отсутствует, то в этой точке следует приложить соответствующую фиктивную обобщенную силу.

Затем, написав выражение для изгибающего момента от системы сил, включая указанную фиктивную силу, необходимо взять его производную по этой фиктивной силе и в полученном выражении для перемещения положить фиктивную обобщенную силу равной нулю.

### 8.33. Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора

Любое сооружение под действием внешних факторов деформируется, изменяя свою первоначальную форму, и принимает форму равновесия, при котором влияние внешних воздействий уравнивается внутренними силами сопротивления.

При этом прогиб и угол поворота балки (рамы) в точке приложения сосредоточенной силы могут быть вычислены по формулам (8.72) и (8.73)

$$w_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx; \quad \varphi_M = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial M} dx.$$

Выясним сущность этих производных.

Если на балку действует произвольная внешняя нагрузка, то момент  $M(x)$  в любом сечении такой балки выражается линейной функцией от нагрузок

$$M(x) = a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + b_1 M_1 + b_2 M_2 + \dots + c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ , — являются функциями пролета балки, расстояний точек приложения сил и моментов от опор и абсциссы  $x$  рассматриваемого сечения.

Например, определим прогиб точки приложения силы  $F_1$ . (рис. 8.46)

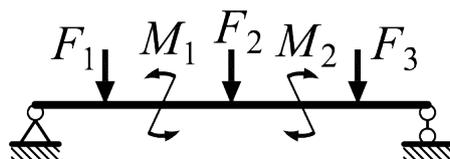


Рис. 8.46

В этом случае

$$\frac{\partial M(x)}{\partial F_1} = a_1,$$

а  $F_2, F_3, \dots, M_1, M_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ , при этом дифференцировании постоянные величины.

Следовательно,  $a_1$  можно рассматривать как численную величину момента  $M$  в любом сечении балки от действия, так называемой, единичной нагрузки, то есть силы  $F = 1$ .

Действительно, подставляя в формулу вместо  $F_1$  его частное значение — единицу, и приравнивая все остальные нагрузки нулю, получаем

$$M = a_1.$$

Например, для балки (рис. 8.47) изгибающий момент в ее произвольном сечении равен

$$M_{(x)} = -Fx - \frac{qx^2}{2}.$$

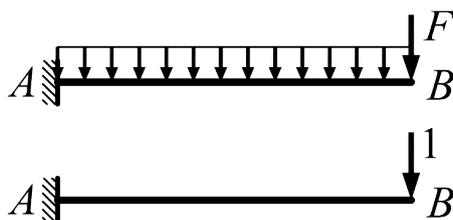


Рис. 8.47

Производная в этом случае равна

$$\frac{\partial M_{(x)}}{\partial F} = -x.$$

Это выражение равно изгибающему моменту балки в ее произвольном сечении, если нагрузить ее силой равной *единице*, приложенной в той же точке  $B$ , где расположена сила  $F$ , и направленной в ту же сторону.

Аналогично, производная изгибающего момента  $M_{(x)}$  по моменту пары сил  $M_1$  численно представляет собой изгибающий момент от пары с моментом, равным *единице*, приложенной в том же сечении, где имеется пара  $M_1$  и направленной в ту же сторону.

Таким образом, вычисление производных изгибающего момента можно заменить вычислением изгибающих моментов от единичной нагрузки.

Эти моменты обозначают  $\bar{M}$ .

Следовательно, для отыскания перемещений  $\Delta$  (прогиба или угла поворота) любого сечения балки, вне зависимости от того, приложена или не приложена в этом сечении соответствующая сила, необходимо найти выражение для изгибающего момента  $M_{(x)}$  от заданной нагрузки и момента  $\bar{M}$  от соответствующей единичной нагрузки, приложенной в сечении, где требуется найти перемещение  $\Delta$ .

Тогда это перемещение выразится формулой

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_{(x)}\bar{M}}{EI} dx. \quad (8.74)$$

Полученное выражение (8.74) называется *интегралом (формулой) Мора*.

Если в формуле (8.74) под  $\Delta$  подразумевается прогиб, то момент  $\bar{M}$  необходимо вычислять от сосредоточенной единичной безразмерной силы, приложенной в той точке, где отыскивается прогиб.

При вычислении же угла поворота в качестве единичной нагрузки прикладывается безразмерная пара сил с моментом равным единице.

Если при вычислении изгибающих моментов приходится делить балку (раму) на участки, то и интеграл в формуле для перемещений (8.74) распадается на сумму интегралов.

### 8.34. Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора с использованием правила Верещагина

Вычисление интеграла Мора (8.74) удобно производить по правилу Верещагина (правилу «перемножения» эпюр).

Так как единичной нагрузкой бывает обычно либо сосредоточенная сила, либо пара сил, то эпюра  $\bar{M}$  ограничена прямыми линиями. Поэтому вычисление  $\int M_{(x)}\bar{M} dx$  при любом очертании эпюры  $M_{(x)}$  можно произвести следующим образом (рис. 8.48).

Пусть эпюра  $M_{(x)}$  имеет криволинейное очертание, а эпюра  $\bar{M}$  — прямолинейное.

Произведение  $M_{(x)} \cdot dx$  можно рассматривать как элемент  $d\omega$  площади эпюры  $M_{(x)}$ . Ордината  $\bar{M} = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

Тогда произведение

$$M_{(x)} \cdot dx \cdot \bar{M} = d\omega \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

а весь интеграл

$$M_{(x)} \cdot dx \cdot \bar{M} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \int d\omega \cdot x$$

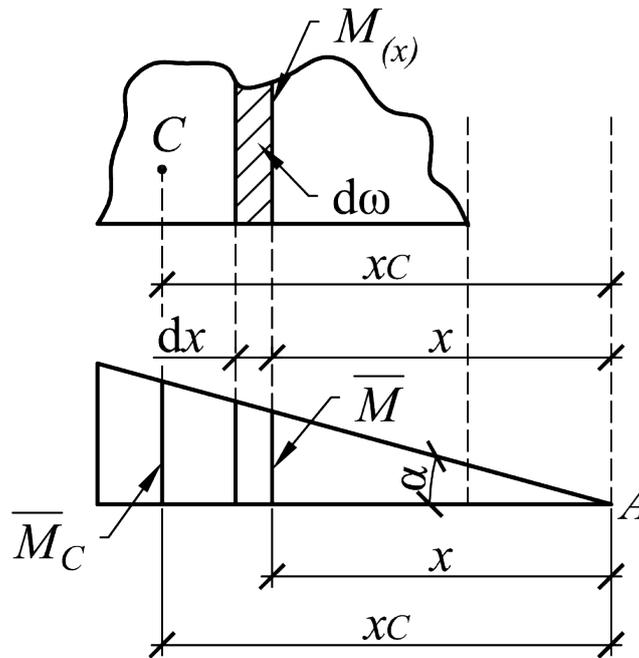


Рис. 8.48

представляет собой статический момент площади эпюры  $M_{(x)}$  относительно точки  $A$ , умноженный на  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Но этот статический момент равен всей площади  $\Omega$  эпюры  $M_{(x)}$ , умноженной на расстояние от ее центра тяжести  $x_C$  до точки  $A$ .

Таким образом,

$$\int M_{(x)} \cdot \bar{M} dx = \Omega \cdot x_C \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Величина  $x_C \cdot \operatorname{tg} \alpha$  равна ординате  $\bar{M}_C$  эпюры  $\bar{M}$ .

Отсюда

$$\int M_{(x)} \cdot \bar{M} dx = \Omega \cdot \bar{M}_C.$$

и искомое перемещение равно

$$\Delta = \frac{\Omega \cdot \bar{M}_C}{EI}. \quad (8.75)$$

Таким образом, для определения перемещений  $\Delta$  необходимо вычислить площадь  $\Omega$  эпюры  $M_{(x)}$ , умножить ее на ординату  $\bar{M}_C$  эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести площади  $\Omega$  и разделить на жесткость балки.

Чтобы применить способ Мора для определения перемещений в стержнях переменного сечения, преобразуем формулу для перемещений

$$\Delta = \int_l \frac{M_{(x)} \bar{M}}{EI} dx = \sum_i^n \int_{l_i} \frac{M_{(x)} \left( \frac{I_0}{I_{(x)}} \right)}{EI_0} \cdot \bar{M}_i \cdot dx. \quad (8.76)$$

Здесь  $I_{(x)}$  — момент инерции произвольного сечения;

$I_0$  — момент инерции определенного (характерного) сечения.

Обозначим

$$M_{(x)} \frac{I_0}{I_{(x)}} = M_{\text{пр}}. \quad (8.77)$$

и назовем эту величину *приведенным изгибающим моментом в текущем сечении*.

Тогда интеграл Мора можно записать в виде

$$\Delta = \sum_i^n \int_l \frac{M_{\text{пр}i} \bar{M}_i}{EI_0} dx. \quad (8.78)$$

Применяя к полученной формуле правило Верещагина, получим

$$\Delta = n \sum_i^n \frac{\Omega_{\text{пр}i} \bar{M}_{Ci}}{EI_0}. \quad (8.79)$$

Здесь  $\Omega_{\text{пр}i}$  — площадь приведенной эпюры моментов на  $i$ -ом участке;

$M_{Ci}$  — ордината единичной эпюры под центром тяжести приведенной эпюры на  $i$ -ом участке.

Следовательно, определение перемещений (прогибов или углов поворота произвольного сечения балки или рамы) с помощью правила Верещагина производится в следующем порядке (рис. 8.49):

1. Строится эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки — эпюра  $M_P$  (грузовая эпюра).

2. Выбирается вспомогательное единичное состояние системы. Для этого к балке или раме, освобожденной от заданной нагрузки, по направлению искомого перемещения прикладывается **безразмерная единичная сила**:

— при определении линейного перемещения — *безразмерная сосредоточенная единичная сила*;

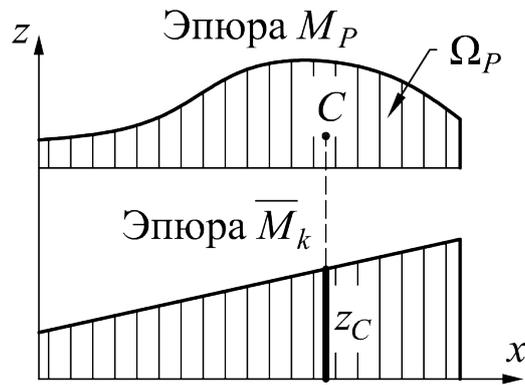


Рис. 8.49. Правило Верещагина

— при определении угла поворота — *безразмерный сосредоточенный единичный момент*.

3. Строится эпюра изгибающих моментов от действия этой *безразмерной единичной силы* — эпюра  $\bar{M}_k$ .

4. Ось балки (рамы) разбивается на участки таким образом, чтобы в пределах участка эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_k$  не имели бы особенностей (переломов и скачков).

5. На каждом участке балки (рамы) для вычисления интеграла Мора по правилу Верещагина (правилу «перемножения» эпюр) необходимо площадь одной эпюры (обычно грузовой эпюры  $M_P$ , так как, если есть криволинейная эпюра, то обязательно ее площадь) умножить на ординату другой эпюры, расположенную под центром тяжести первой, и разделить на жесткость балки (рамы), то есть

$$\int_0^l \frac{M_P(x) \bar{M}_k(x)}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \Omega_P u_C, \quad (8.80)$$

где  $\Omega_P$  — площадь грузовой эпюры  $M_P$  на рассматриваемом участке балки (рамы), знак которой определяется знаком соответствующей эпюры  $M_P$ ;

$u_C$  — ордината в линейной эпюре  $\bar{M}_k(x)$  под центром тяжести эпюры  $M_P$  на рассматриваемом участке балки (рамы), знак которой определяется знаком соответствующей эпюры  $\bar{M}_k(x)$  (рис. 8.49);

$EI_y$  — жесткость поперечного сечения балки (рамы) на рассматриваемом участке.

На первый взгляд, описанный графоаналитический способ вычисления интегралов Мора не даёт упрощений, так как всё равно приходится вычислять площадь  $\Omega_P$  криволинейных эпюр.

Однако, встречающиеся на практике эпюры могут быть разбиты на ряд простых фигур (прямоугольник, треугольник, симметричную квадратичную параболу), у которых известны площадь и положение центра тяжести.

На рис. 8.50 приведены сведения о координатах центра тяжести и площадях простейших эпюр — прямоугольник, треугольник и симметричная квадратичная парабола.

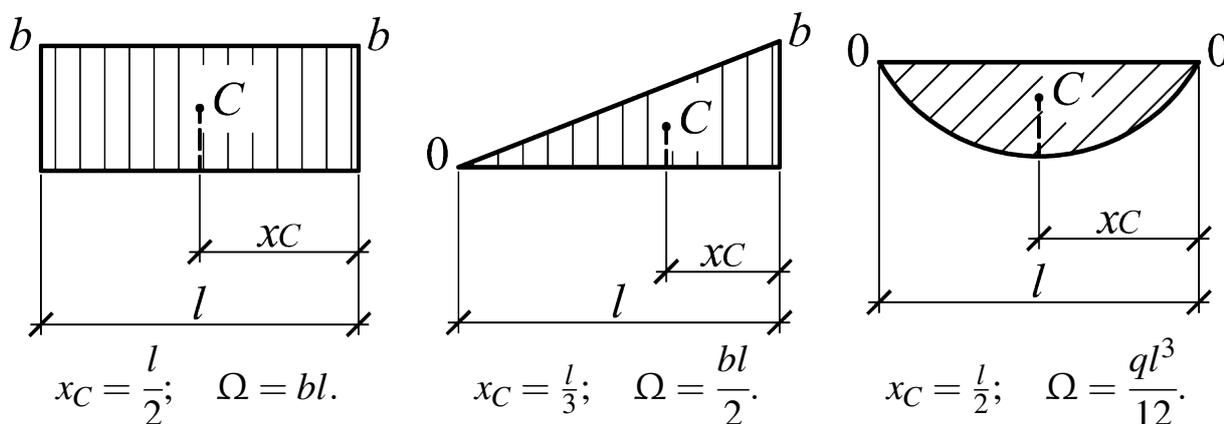


Рис. 8.50. Координаты центров тяжести эпюр и их площади

Примеры разбиения эпюр приведены на рис. 8.51.

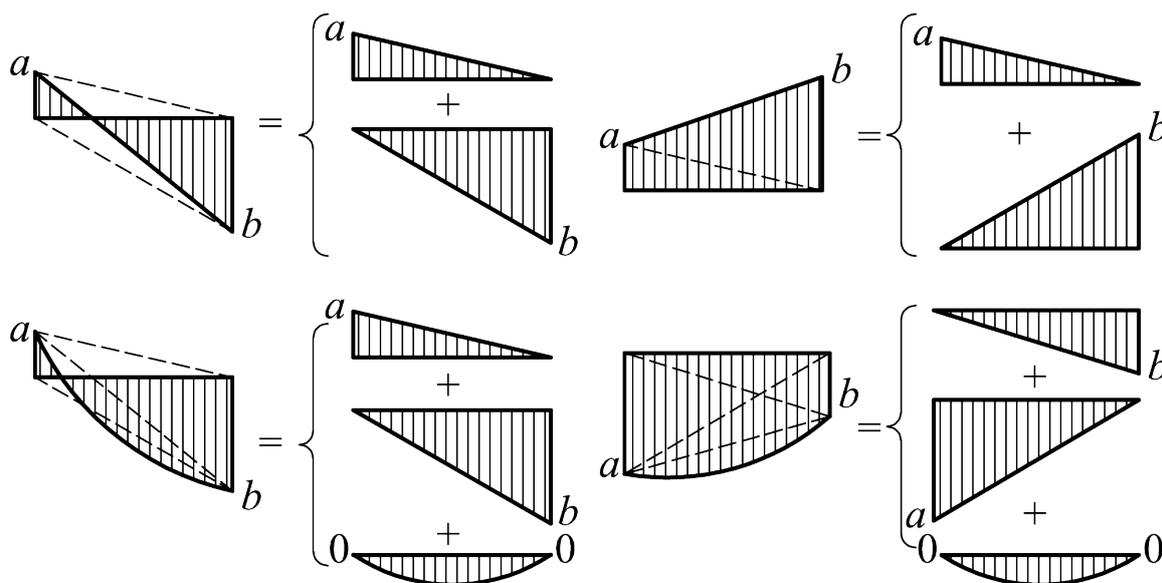


Рис. 8.51. Разбиение сложных эпюр на простые эпюры

*Результат «перемножения» эпюр на рассматриваемом участке балки (рамы) является положительным, если эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_k$  одного знака, и отрицательным, если эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_k$  разных знаков.*

Если  $\Delta$  положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательно — то противоположно этому направлению.

### **8.35. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Изгиб прямолинейных брусьев»**

1. Какой вид деформации называется чистым изгибом?
2. Какой вид деформации называется плоским поперечным изгибом?
3. Что происходит с продольными волокнами материала при изгибе?
4. На какие три основных типа делятся опоры балок?
5. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки, рамы?
6. Что называется поперечной силой в данном сечении балки?
7. Что называется изгибающим моментом в данном сечении балки?
8. Что называется продольной силой в данном сечении рамы?
9. Как определяется знак поперечной, продольной сил и изгибающего момента в поперечном сечении балки и рамы?
10. Для чего строятся эпюры внутренних усилий при изгибе?
11. Как определяются границы участков балки (рамы)?
12. Приведите дифференциальные зависимости между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью внешней распределенной нагрузки.
13. В каком случае на эпюре поперечных сил наблюдается «скачок» и чему он равен?
14. Сформулируете правило «скачков» на эпюре изгибающих моментов.
15. Как изменяется поперечная сила и изгибающий момент на участках балки, где отсутствует внешняя распределенная нагрузка?
16. По какому закону изменяются поперечная сила и изгибающий момент на участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка?

17. При каком значении поперечной силы изгибающий момент в сечении балки принимает экстремальное значение?
18. Что называется силовой плоскостью (силовой линией)?
19. Что называется нейтральной линией?
20. Назовите гипотезы, которые принимаются для вывода формулы нормальных напряжений при чистом плоском изгибе.
21. Как определяется опасное сечение балки по нормальным напряжениям?
22. По какой формуле определяются нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки?
23. Как определяются опасные точки поперечного сечения балки по нормальным напряжениям?
24. Напишите условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.
25. Эпюра нормальных напряжений при изгибе. Как с помощью этой эпюры определить напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки?
26. Какие гипотезы используются при выводе формулы касательных напряжений при плоском изгибе?
27. Напишите формулу Журавского для определения касательных напряжений при плоском изгибе.
28. Какой вид имеют эпюры касательных напряжений в поперечных сечениях балки прямоугольной формы, для стенки двутавра?
29. Где находятся опасные точки в поперечном сечении балки по касательным напряжениям?
30. Напишите условие прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при плоском изгибе.
31. Как проверяется прочность балки по главным напряжениям?
32. Какие перемещения получают поперечные сечения балок при плоском изгибе?
33. Что называется упругой линией (изогнутой осью) балки?
34. Что называется прогибом балки?
35. Что называется углом поворота поперечного сечения балки?

36. Запишите дифференциальную зависимость между прогибом и углом поворота сечений балки.
37. Напишите приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
38. Что называется жесткостью балки?
39. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления прогибов по методу начальных параметров.
40. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления углов поворота сечений по методу начальных параметров.
41. Из каких условий определяются неизвестные начальные параметры балки?
42. Назовите основные правила контроля правильности построенных эшюр  $\varphi$  и  $\nu$ .
43. Дайте определение статически неопределимой системы?
44. Как устанавливается степень статической неопределимости балки?
45. План расчета статически неопределимой системы?
46. Какие основные преимущества статически неопределимых балок перед статически определимыми?
47. Как читается теорема Кастильяно?
48. Напишите интеграл Мора.
49. В чем суть правила Верещагина?
50. План определения перемещений (прогибов или углов поворота произвольного сечения балки или рамы) методом Мора с помощью правила Верещагина.

## Литература

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов: Учебник для студентов строительных специальностей вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. — М.: Высшая школа, 2004. — 560 с.
2. *Андреев, В. И.* Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): учебник / В. И. Андреев, А. Г. Паушкин, А. Н. Леонтьев. — М.: Изд-во АСВ, 2012. — 251 с.
3. *Атаров, Н. М.* Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100.—М.: ИНФРА-М, 2010. — 323 с.
4. *Варданян, Г. С.* Сопротивление материалов (с основами строительной механики) / Г. С. Варданян, Н. М. Атаров, А. А. Горшков; под ред. Г. С. Варданяна. — М.: ИНФРА-М, 2011. — 480 с.
5. *Ерёмин, В. Д.* Сопротивление материалов и техническая механика (Часть I): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. — Ростов-на-Дону: ИЦ ДГТУ, 2018. — 124 с.
6. *Михайлов, А. М.* Сопротивление материалов: учебник для студентов высших учебных заведений / А. М. Михайлов. — М.: Издательский центр «Академия», — 2009. — 448 с.
7. *Феодосьев, В. И.* Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. — М.: Изд-во МГТУ, 1999. — 591 с.

## Тема А. Сортамент прокатной стали

### А.1. Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240—97

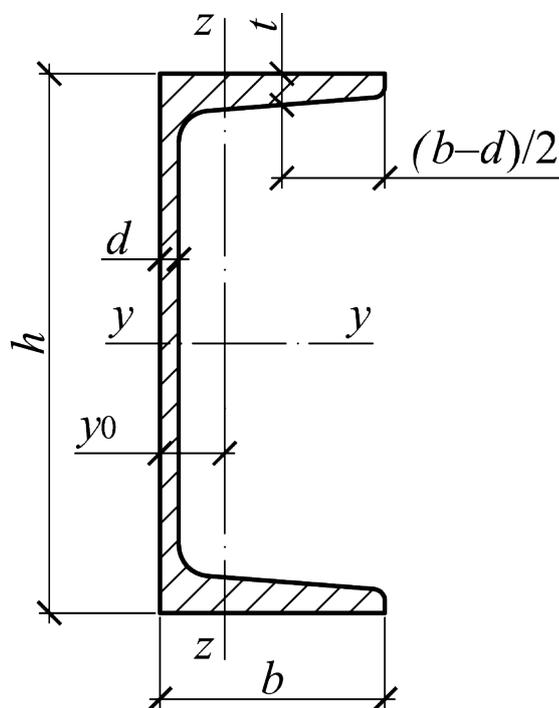


Рис. А.1. Швеллер с уклоном внутренних граней полки

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

- $h$  — высота (швеллера);
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — толщина полки;
- $y_0$  — расстояние от оси  $z - z$  до наружной грани стенки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $i$  — радиус инерции;
- $S_y$  — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м швеллера вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .

Табл. А.1.1. Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см <sup>2</sup>	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	S <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см	y <sub>0</sub> см	Масса 1 п. м. кг
5У	50	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.95	1.16	4.84
6,5У	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.00	8.70	3.68	1.08	1.24	5.90
8У	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.30	12.80	4.75	1.19	1.31	7.05
10У	100	46	4.5	7.6	10.90	174.0	34.8	3.99	20.40	20.40	6.46	1.37	1.44	8.59
12У	120	52	4.8	7.8	13.30	304.0	50.6	4.78	29.60	31.20	8.52	1.53	1.54	10.40
14У	140	58	4.9	8.1	15.60	491.0	70.2	5.60	40.80	45.40	11.00	1.70	1.67	12.30
16У	160	64	5.0	8.4	18.10	747.0	93.4	6.42	54.10	63.30	13.80	1.87	1.80	14.20
16аУ	160	68	5.0	9.0	19.50	823.0	103.0	6.49	59.40	78.80	16.40	2.01	2.00	15.30
18У	180	70	5.1	8.7	20.70	1 090.0	121.0	7.24	69.80	86.00	17.00	2.04	1.94	16.30
18аУ	180	74	5.1	9.3	22.20	1 190.0	132.0	7.32	76.10	105.00	20.00	2.18	2.13	17.40
20У	200	76	5.2	9.0	23.40	1 520.0	152.0	8.07	87.80	113.00	20.50	2.20	2.07	18.40
22У	220	82	5.4	9.5	26.70	2 110.0	192.0	8.89	110.00	151.00	25.10	2.37	2.21	21.00
24У	240	90	5.6	10.0	30.60	2 900.0	242.0	9.73	139.00	208.00	31.60	2.60	2.42	24.00
27У	270	95	6.0	10.5	35.20	4 160.0	308.0	10.90	178.00	262.00	37.30	2.73	2.47	27.70
30У	300	100	6.5	11.0	40.50	5 810.0	387.0	12.00	224.00	327.00	43.60	2.84	2.52	31.80
33У	330	105	7.0	11.7	46.50	7 980.0	484.0	13.10	281.00	410.00	51.80	2.97	2.59	36.50
36У	360	110	7.5	12.6	43.40	10 820.0	601.0	14.20	350.00	513.00	61.70	3.10	2.68	41.90
40У	400	115	8.0	13.5	61.50	15 220.0	761.0	15.70	444.00	642.00	73.40	3.23	2.75	48.30

## А.2. Выборка двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок по ГОСТ Р 57837—2017

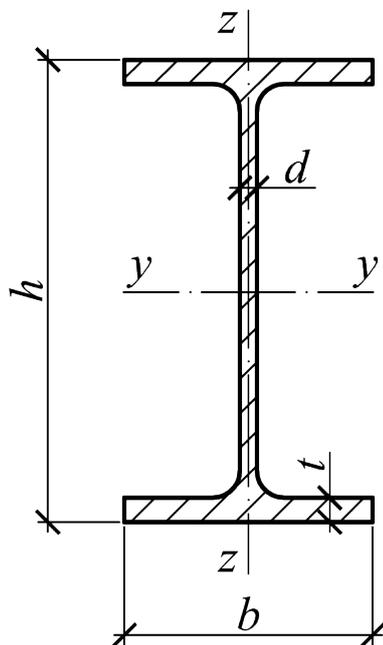


Рис. А.2. Двутавр стальной горячекатаный с параллельными гранями полок

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

- $h$  — высота (двутавра);
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — толщина полки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $i$  — радиус инерции;
- $S$  — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .

Табл. А.2. Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см
<b>Тип Б — Балочные нормальные двутавры</b>														
10Б1	100.0	55.0	4.1	5.7	10.32	8.10	171.01	34.20	19.70	40.70	15.92	5.79	4.57	12.42
12Б1	117.6	64.0	3.8	5.1	11.03	8.70	257.36	43.80	24.94	48.30	22.39	7.00	5.49	14.25
12Б2	120.0	64.0	4.4	6.3	13.21	10.40	317.75	53.00	30.36	49.04	27.67	8.65	6.79	14.47
14Б1	137.4	73.0	3.8	5.6	13.39	10.50	434.86	63.30	35.80	56.98	36.42	9.98	7.76	16.49
14Б2	140.0	73.0	4.7	6.9	16.43	12.90	541.22	77.30	44.17	57.40	44.92	12.31	9.62	16.54
16Б1	157.0	82.0	4.0	5.9	16.18	12.70	689.28	87.80	49.55	65.27	54.43	13.27	10.35	18.34
16Б2	160.0	82.0	5.0	7.4	20.09	15.80	869.29	108.70	61.93	65.78	68.31	16.66	13.05	18.44
18Б1	177.0	91.0	4.3	6.5	19.58	15.40	1062.74	120.10	67.66	73.68	81.89	18.00	13.98	20.45
18Б2	180.0	91.0	5.3	8.0	23.95	18.80	1316.96	146.30	83.21	74.16	100.85	22.16	17.30	20.52
20Б0	198.0	99.0	4.5	7.0	23.18	18.20	1581.56	159.80	89.88	82.60	113.62	22.95	17.86	22.14
20Б1	200.0	100.0	5.5	8.0	27.16	21.30	1844.26	184.40	104.73	82.41	133.91	26.78	20.97	22.21
20Б2	203.0	101.0	6.5	9.5	32.19	25.30	2218.49	218.60	124.99	83.02	163.93	32.46	25.50	22.57
20Б3	208.0	102.0	8.0	12.0	40.24	31.60	2852.62	274.30	158.46	84.20	213.50	41.86	33.02	23.03
25Б1	248.0	124.0	5.0	8.0	32.68	25.70	3537.11	285.30	159.68	104.04	254.85	41.11	31.80	27.93
25Б2	250.0	125.0	6.0	9.0	37.66	29.60	4051.73	324.10	182.93	103.73	293.85	47.02	36.55	27.93
25Б3	255.0	126.0	7.5	11.5	47.62	37.40	5238.16	410.80	233.88	104.88	384.79	61.08	47.67	28.43
25Б4	260.0	127.0	9.0	14.0	57.68	45.30	6481.01	498.50	286.25	106.00	480.07	75.60	59.24	28.85
30Б1	298.0	149.0	5.5	8.0	40.80	32.00	6318.22	424.00	237.53	124.44	442.00	59.33	45.88	32.91
30Б2	300.0	150.0	6.5	9.0	46.78	36.70	7209.26	480.60	271.06	124.14	507.53	67.67	52.56	32.94
30Б3	305.0	151.0	8.0	11.5	58.74	46.10	9254.92	606.90	344.37	125.52	661.88	87.67	68.31	33.57
30Б4	310.0	152.0	9.5	14.0	70.80	55.60	11381.41	734.30	419.40	126.79	822.37	108.21	84.60	34.08
35Б1	346.0	174.0	6.0	9.0	52.68	41.40	11094.49	641.30	358.09	145.12	791.54	90.98	70.11	38.76
35Б2	350.0	175.0	7.0	11.0	63.14	49.60	13559.01	774.80	433.96	146.54	984.34	112.50	86.79	39.48
35Б3	355.0	176.0	8.5	13.5	77.08	60.50	16797.02	946.30	533.54	147.62	1229.36	139.70	108.13	39.94
35Б4	361.0	177.0	10.0	16.5	92.89	72.90	20719.71	1147.90	651.07	149.35	1528.90	172.76	134.02	40.57
40Б1	396.0	199.0	7.0	11.0	72.16	56.60	20018.83	1011.10	563.93	166.56	1447.14	145.44	111.97	44.78
40Б2	400.0	200.0	8.0	13.0	84.12	66.00	23704.43	1185.20	663.13	167.87	1736.39	173.64	133.82	45.43
40Б3	406.0	201.0	9.5	16.0	102.05	80.10	29352.45	1445.90	813.38	169.60	2169.89	215.91	166.74	46.11

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см
40Б4	412.0	202.0	11.0	19.0	120.10	94.30	35196.83	1708.60	966.65	171.19	2616.25	259.03	200.47	46.67
45Б1	446.0	199.0	8.0	12.0	84.30	66.20	28697.35	1286.90	725.06	184.50	1580.03	158.80	123.29	43.29
45Б2	450.0	200.0	9.0	14.0	96.76	76.00	33450.76	1486.70	839.53	185.93	1871.57	187.16	145.46	43.98
45Б3	456.0	201.0	10.5	17.0	115.43	90.60	40710.41	1785.50	1012.55	187.80	2307.62	229.61	178.81	44.71
45Б4	462.0	202.0	12.0	20.0	134.22	105.40	48197.42	2086.50	1188.75	189.50	2756.66	272.94	213.01	45.32
50Б1	492.0	199.0	8.8	12.0	92.38	72.50	36841.89	1497.60	853.45	199.70	1581.96	158.99	124.86	41.38
50Б2	496.0	199.0	9.0	14.0	101.27	79.50	41869.08	1688.30	957.23	203.33	1844.89	185.42	144.88	42.68
50Б3	500.0	200.0	10.0	16.0	114.23	89.70	47846.05	1913.80	1087.59	204.66	2140.79	214.08	167.48	43.29
50Б4	508.0	201.0	12.0	20.0	139.99	109.90	59953.57	2360.40	1348.82	206.94	2717.85	270.43	212.23	44.06
50Б5	516.0	202.0	15.0	24.0	170.59	133.90	73345.26	2842.80	1642.68	207.35	3315.53	328.27	260.04	44.09
55Б1	543.0	220.0	9.5	13.5	113.36	89.00	55677.42	2050.70	1164.94	221.62	2405.54	218.69	171.67	46.06
55Б2	547.0	220.0	10.0	15.5	124.74	97.90	62784.45	2295.60	1301.49	224.34	2761.34	251.03	196.56	47.05
55Б3	553.0	221.0	12.0	18.5	148.63	116.70	75321.22	2724.10	1554.49	225.11	3342.92	302.53	237.99	47.42
55Б4	560.0	222.0	14.0	22.0	174.86	137.30	89907.09	3211.00	1842.20	226.75	4032.07	363.25	286.76	48.02
60Б1	596.0	199.0	10.0	15.0	120.45	94.60	68715.90	2305.90	1325.36	238.85	1979.66	198.96	157.64	40.54
60Б2	600.0	200.0	11.0	17.0	134.41	105.50	77632.25	2587.70	1489.36	240.32	2278.16	227.82	180.72	41.17
60Б3	604.0	201.0	12.5	19.0	151.28	118.80	87472.10	2896.40	1675.38	240.46	2586.62	257.38	205.28	41.35
60Б4	612.0	202.0	15.0	23.0	181.97	142.90	106509.50	3480.70	2026.68	241.93	3182.62	315.11	253.12	41.82
70Б1	691.0	260.0	12.0	15.5	164.74	129.30	125922.20	3644.60	2094.79	276.47	4557.35	350.57	276.64	52.60
70Б2	697.0	260.0	12.5	18.5	183.64	144.16	145904.02	4186.63	2392.68	281.87	5437.68	418.28	328.41	54.41
70Б3	702.0	261.0	14.5	21.0	210.26	165.10	167085.05	4760.30	2736.06	281.89	6248.49	478.81	378.10	54.51
70Б4	710.0	262.0	17.0	25.0	248.14	194.80	199679.98	5624.80	3249.28	283.67	7531.16	574.90	456.29	55.09
<b>Тип Ш — Балочные широкополочные двутавры</b>														
20Ш0	190.0	149.0	5.0	7.0	31.11	24.40	2079.60	218.90	120.97	81.76	386.62	51.90	39.79	35.25
20Ш1	194.0	150.0	6.0	9.0	39.01	30.60	2689.74	277.30	154.28	83.04	507.16	67.62	51.85	36.06
20Ш2	199.0	151.0	7.5	11.5	49.38	38.80	3502.14	352.00	198.01	84.21	661.25	87.58	67.27	36.59
20Ш3	204.0	152.0	9.0	14.0	59.85	47.00	4362.01	427.70	243.18	85.37	821.37	108.08	83.18	37.05
20Ш4	211.0	155.0	11.0	17.5	75.06	58.90	5696.83	540.00	311.20	87.12	1089.19	140.54	108.38	38.09
20Ш5	218.0	157.0	13.0	21.0	90.27	70.90	7117.64	653.00	381.26	88.80	1359.05	173.13	133.81	38.80
20Ш6	228.0	159.0	16.0	26.0	112.29	88.20	9312.80	816.90	485.66	91.07	1749.68	220.09	170.75	39.47

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см
25Ш0	240.0	174.0	6.0	9.0	46.84	36.80	4981.13	415.10	229.64	103.13	791.75	91.01	69.84	41.11
25Ш1	244.0	175.0	7.0	11.0	56.24	44.20	6121.23	501.70	279.19	104.33	984.48	112.51	86.36	41.84
25Ш2	249.0	176.0	8.5	13.5	68.59	53.80	7624.69	612.40	343.94	105.44	1229.33	139.70	107.41	42.34
25Ш3	256.0	177.0	10.5	17.0	85.69	67.30	9819.49	767.20	436.06	107.05	1575.20	177.99	137.18	42.88
25Ш4	264.0	182.0	13.0	21.0	107.50	84.40	12751.44	966.00	556.26	108.91	2116.49	232.58	179.70	44.37
25Ш5	274.0	184.0	16.0	26.0	133.40	104.70	16478.26	1202.80	703.59	111.14	2710.17	294.58	228.44	45.07
25Ш6	286.0	186.0	19.0	32.0	163.42	128.30	21287.68	1488.70	884.76	114.13	3448.57	370.81	288.22	45.94
30Ш0	290.0	199.0	7.0	10.0	61.48	48.30	9429.75	650.30	360.60	123.85	1316.09	132.27	101.70	46.27
30Ш1	294.0	200.0	8.0	12.0	72.38	56.80	11338.30	771.30	429.51	125.16	1603.26	160.33	123.28	47.06
30Ш2	300.0	201.0	9.0	15.0	87.38	68.60	14209.66	947.30	529.86	127.52	2034.13	202.40	155.42	48.25
30Ш3	306.0	203.0	11.0	18.0	105.56	82.90	17455.33	1140.90	644.63	128.59	2515.46	247.83	190.85	48.82
30Ш4	314.0	206.0	13.0	22.0	128.52	100.90	21967.16	1399.20	798.35	130.74	3213.67	312.01	240.56	50.00
30Ш5	326.0	208.0	16.0	28.0	162.46	127.50	29037.68	1781.50	1031.79	133.69	4213.04	405.10	313.16	50.92
30Ш6	342.0	210.0	20.0	36.0	207.98	163.30	39315.66	2299.20	1357.14	137.49	5580.38	531.47	412.35	51.80
35Ш1	334.0	249.0	8.0	11.0	83.17	65.30	17107.05	1024.40	565.71	143.42	2834.62	227.68	174.45	58.38
35Ш2	340.0	250.0	9.0	14.0	101.51	79.70	21676.50	1275.10	706.03	146.13	3650.97	292.08	223.45	59.97
35Ш3	347.0	252.0	11.0	17.5	125.95	98.90	27535.21	1587.00	886.41	147.86	4674.90	371.02	284.26	60.92
35Ш4	354.0	254.0	13.0	21.0	150.67	118.30	33692.45	1903.50	1072.31	149.54	5745.80	452.43	347.18	61.75
35Ш5	364.0	258.0	16.0	26.0	187.51	147.20	43231.44	2375.40	1354.36	151.84	7458.32	578.16	444.79	63.07
35Ш6	376.0	260.0	19.0	32.0	229.11	179.90	54967.48	2923.80	1688.25	154.89	9398.88	722.99	557.28	64.05
35Ш7	392.0	262.0	23.0	40.0	284.79	223.60	71815.25	3664.00	2150.36	158.80	12030.69	918.37	709.81	65.00
40Ш1	383.0	299.0	9.5	12.5	112.91	88.60	30554.32	1595.50	880.73	164.50	5576.08	372.98	285.42	70.27
40Ш2	390.0	300.0	10.0	16.0	135.95	106.70	38674.10	1983.30	1093.97	168.66	7207.77	480.52	366.53	72.81
40Ш3	397.0	302.0	12.0	19.5	164.89	129.40	47846.38	2410.40	1339.96	170.34	8962.48	593.54	453.33	73.72
40Ш4	406.0	304.0	14.5	24.0	201.98	158.60	60107.10	2960.90	1662.00	172.51	11253.74	740.38	566.43	74.64
40Ш5	418.0	309.0	17.5	30.0	252.20	198.00	77867.25	3725.70	2114.90	175.71	14776.27	956.39	732.65	76.54
40Ш6	430.0	311.0	21.0	36.0	303.25	238.10	96432.24	4485.20	2578.21	178.32	18086.35	1163.11	893.43	77.23
40Ш7	446.0	313.0	25.0	44.0	369.09	289.70	122543.61	5495.20	3204.85	182.21	22547.07	1440.71	1109.25	78.16
45Ш0	434.0	299.0	10.0	15.0	135.04	106.00	46794.17	2156.40	1192.24	186.15	6692.40	447.65	342.87	70.40
45Ш1	440.0	300.0	11.0	18.0	157.38	123.60	56069.13	2548.60	1412.44	188.75	8111.31	540.75	413.80	71.79

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см
45Ш2	446.0	302.0	13.0	21.0	184.30	144.70	66379.08	2976.60	1661.51	189.78	9655.62	639.44	490.29	72.38
45Ш3	452.0	304.0	15.0	24.0	211.46	166.00	77050.83	3409.30	1915.99	190.88	11258.33	740.68	569.04	72.97
45Ш4	464.0	308.0	18.0	30.0	262.46	206.00	98962.82	4265.60	2420.93	194.18	14639.89	950.64	731.39	74.69
45Ш5	476.0	310.0	21.0	36.0	312.98	245.70	121722.09	5114.40	2932.26	197.21	17919.22	1156.08	891.09	75.67
45Ш6	492.0	312.0	25.0	44.0	380.50	298.70	153856.39	6254.30	3633.74	201.08	22341.69	1432.16	1106.76	76.63
50Ш1	482.0	300.0	11.0	15.0	145.52	114.20	60366.76	2504.80	1395.56	203.67	6763.81	450.92	347.62	68.18
50Ш2	487.0	300.0	14.5	17.5	176.34	138.40	71863.01	2951.30	1666.63	201.87	7897.76	526.52	409.42	66.92
50Ш3	493.0	300.0	15.5	20.5	198.86	156.10	83437.19	3384.90	1912.66	204.83	9251.07	616.74	478.76	68.21
50Ш4	499.0	300.0	16.5	23.5	221.38	173.80	95277.59	3818.70	2161.40	207.45	10604.77	706.98	548.21	69.21
50Ш5	508.0	302.0	19.0	28.0	260.80	204.70	114959.83	4526.00	2578.55	209.95	12894.50	853.94	663.27	70.31
50Ш6	518.0	310.0	22.0	33.0	309.84	243.20	140248.12	5415.00	3106.50	212.75	16442.93	1060.83	825.05	72.85
50Ш7	532.0	312.0	26.0	40.0	372.92	292.70	174203.77	6549.00	3797.96	216.13	20335.66	1303.57	1017.09	73.84
50Ш8	548.0	314.0	30.0	48.0	442.84	347.60	214879.98	7842.30	4598.03	220.28	24895.52	1585.70	1240.04	74.98
60Ш1	582.0	300.0	12.0	17.0	174.49	137.00	102709.98	3529.60	1981.30	242.62	7669.85	511.32	396.49	66.30
60Ш2	589.0	300.0	16.0	20.5	217.41	170.70	126193.28	4285.00	2438.84	240.92	9259.23	617.28	483.58	65.26
60Ш3	597.0	300.0	18.0	24.5	252.37	198.10	150035.32	5026.30	2869.72	243.82	11069.15	737.94	578.58	66.23
60Ш4	605.0	300.0	20.0	28.5	287.33	225.60	174450.48	5767.00	3305.39	246.40	12881.17	858.74	674.12	66.96
60Ш5	616.0	302.0	23.0	34.0	338.13	265.40	210467.04	6833.40	3941.46	249.49	15686.68	1038.85	817.44	68.11
60Ш6	630.0	315.0	27.0	41.0	412.99	324.20	266239.93	8452.10	4907.09	253.90	21476.18	1363.57	1073.64	72.11
60Ш7	644.0	317.0	31.0	48.0	480.93	377.50	318172.04	9881.10	5788.14	257.21	25653.76	1618.53	1279.02	73.04
60Ш8	664.0	319.0	36.0	58.0	574.05	450.60	394963.73	11896.50	7047.57	262.30	31634.21	1983.34	1572.47	74.23
70Ш1	692.0	300.0	13.0	20.0	211.49	166.00	172424.05	4983.40	2814.39	285.53	9024.74	601.65	468.07	65.32
70Ш2	698.0	300.0	15.0	23.0	242.53	190.40	198779.77	5695.70	3233.41	286.29	10382.92	692.19	540.47	65.43
70Ш3	707.0	300.0	18.0	27.5	289.09	226.90	239021.10	6761.60	3867.01	287.54	12424.20	828.28	650.29	65.56
70Ш4	715.0	300.0	20.5	31.5	329.39	258.60	275127.01	7695.90	4426.46	289.01	14242.00	949.47	748.55	65.76
70Ш5	725.0	300.0	23.0	36.5	375.69	294.90	319781.96	8821.60	5099.30	291.75	16514.18	1100.95	870.34	66.30
70Ш6	740.0	313.0	27.0	44.0	458.21	359.70	403258.33	10898.90	6334.98	296.66	22622.21	1445.51	1143.72	70.26
70Ш7	758.0	315.0	32.0	53.0	549.27	431.20	496466.98	13099.40	7693.00	300.64	27822.58	1766.51	1405.68	71.17
70Ш8	780.0	317.0	38.0	64.0	660.25	518.30	616075.38	15796.80	9389.94	305.47	34321.60	2165.40	1734.01	72.10

Тип К — Колонные двутавры

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см
15K1	147.0	149.0	6.0	8.5	34.17	26.80	1366.76	186.00	103.63	63.25	469.21	62.98	48.05	37.06
15K2	150.0	150.0	7.0	10.0	40.14	31.50	1641.33	218.80	123.04	63.95	563.28	75.10	57.36	37.46
15K3	155.0	151.0	8.5	12.5	49.84	39.10	2117.61	273.20	155.69	65.18	718.46	95.16	72.78	37.97
15K4	160.0	152.0	10.0	15.0	59.64	46.80	2629.16	328.60	189.67	66.40	879.66	115.74	88.65	38.41
15K5	166.0	153.0	12.0	18.0	71.72	56.30	3291.43	396.60	232.39	67.74	1077.13	140.80	108.12	38.75
20K1	196.0	199.0	6.5	10.0	52.69	41.40	3846.06	392.50	216.41	85.44	1314.47	132.11	100.38	49.95
20K2	200.0	200.0	8.0	12.0	63.53	49.90	4715.63	471.60	262.75	86.15	1601.53	160.15	121.91	50.21
20K3	204.0	201.0	9.0	14.0	73.57	57.80	5602.48	549.30	308.35	87.26	1896.76	188.73	143.72	50.78
20K4	210.0	201.0	10.5	17.0	88.27	69.30	6962.62	663.10	376.57	88.81	2303.59	229.21	174.72	51.09
20K5	214.0	202.0	12.0	19.0	99.33	78.00	7970.40	744.90	426.84	89.58	2613.87	258.80	197.63	51.30
20K6	220.0	202.0	14.0	22.0	114.97	90.30	9488.15	862.60	500.34	90.84	3027.75	299.78	229.45	51.32
20K7	226.0	203.0	16.0	25.0	131.11	102.90	11136.66	985.60	578.16	92.16	3493.41	344.18	263.98	51.62
20K8	234.0	203.0	18.0	29.0	150.87	118.40	13375.48	1143.20	679.29	94.16	4053.99	399.41	306.76	51.84
25K1	246.0	249.0	8.0	12.0	79.72	62.60	9170.92	745.60	410.68	107.26	3090.06	248.20	188.61	62.26
25K2	250.0	250.0	9.0	14.0	92.18	72.40	10832.61	866.60	480.25	108.41	3648.81	291.90	221.88	62.92
25K3	253.0	251.0	10.0	15.5	102.21	80.20	12153.56	960.80	535.41	109.05	4088.75	325.80	247.85	63.25
25K4	257.0	252.0	11.0	17.5	114.82	90.10	13927.17	1083.80	607.67	110.14	4672.01	370.79	282.18	63.79
25K5	262.0	253.0	12.5	20.0	131.15	103.00	16243.92	1240.00	701.07	111.29	5404.02	427.20	325.46	64.19
25K6	267.0	253.0	14.0	22.5	147.13	115.50	18593.24	1392.80	793.96	112.42	6080.59	480.68	366.65	64.29
25K7	274.0	258.0	16.0	26.0	171.88	134.90	22416.62	1636.30	942.16	114.20	7452.57	577.72	441.04	65.85
25K8	281.0	259.0	18.0	29.5	194.97	153.10	26169.72	1862.60	1083.49	115.86	8556.67	660.75	505.09	66.25
25K9	288.0	260.0	20.0	33.0	218.20	171.30	30128.76	2092.30	1228.96	117.51	9685.85	745.07	570.29	66.63
25K10	298.0	261.0	23.0	38.0	251.62	197.50	36112.37	2423.70	1442.84	119.80	11288.10	864.99	663.49	66.98
30K1	298.0	299.0	9.0	14.0	110.80	87.00	18848.66	1265.00	694.64	130.43	6241.19	417.47	316.82	75.05
30K2	300.0	300.0	10.0	15.0	119.78	94.00	20410.21	1360.70	750.59	130.54	6754.83	450.32	342.13	75.10
30K3	300.0	305.0	15.0	15.0	134.78	105.80	21535.21	1435.70	806.84	126.40	7104.76	465.89	358.04	72.60
30K4	304.0	301.0	11.0	17.0	134.82	105.80	23380.49	1538.20	852.74	131.69	7732.59	513.79	390.46	75.73
30K5	308.0	301.0	12.0	19.0	149.56	117.40	26362.99	1711.90	953.96	132.77	8642.78	574.27	436.61	76.02
30K6	312.0	302.0	13.0	21.0	164.72	129.30	29508.74	1891.60	1059.44	133.84	9648.60	638.98	485.99	76.53
30K7	316.0	302.0	14.5	23.0	180.85	142.00	32732.42	2071.70	1167.93	134.53	10569.09	699.94	533.09	76.45

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см
30K8	316.0	357.0	14.5	23.0	206.15	161.80	38173.52	2416.10	1353.26	136.08	17452.10	977.71	741.50	92.01
30K9	322.0	358.0	16.0	26.0	232.14	182.20	43983.21	2731.90	1541.60	137.65	19896.06	1111.51	843.38	92.58
30K10	328.0	359.0	18.0	29.0	259.60	203.80	50113.52	3055.70	1738.68	138.94	22381.16	1246.86	947.13	92.85
30K11	334.0	360.0	20.0	32.0	287.18	225.40	56488.07	3382.50	1939.98	140.25	24906.98	1383.72	1052.25	93.13
30K12	341.0	361.0	22.0	35.5	318.49	250.00	64158.87	3763.00	2176.26	141.93	27866.03	1543.82	1175.02	93.54
30K13	350.0	362.0	24.0	40.0	357.18	280.40	74376.59	4250.10	2481.31	144.30	31663.84	1749.38	1332.11	94.15
30K14	356.0	371.0	27.0	43.0	394.74	309.90	83542.72	4693.40	2760.90	145.48	36649.59	1975.72	1506.68	96.36
30K15	364.0	372.0	30.0	47.0	433.46	340.30	93889.39	5158.80	3062.80	147.17	40396.23	2171.84	1659.03	96.54
30K16	374.0	373.0	33.0	52.0	479.80	376.60	107317.14	5738.90	3441.68	149.56	45068.65	2416.55	1848.28	96.92
30K17	384.0	374.0	36.0	57.0	526.34	413.20	121512.35	6328.80	3831.76	151.94	49816.72	2664.00	2040.04	97.29
30K18	396.0	375.0	39.0	63.0	580.58	455.80	139424.86	7041.70	4307.16	154.97	55520.26	2961.08	2269.45	97.79
30K19	408.0	385.0	43.0	69.0	650.18	510.40	162282.28	7955.00	4912.82	157.99	65823.94	3419.43	2622.83	100.62
30K20	422.0	387.0	47.0	76.0	717.92	563.60	187072.37	8866.00	5534.78	161.42	73671.75	3807.33	2923.99	101.30
30K21	440.0	389.0	52.0	85.0	804.48	631.50	221339.16	10060.90	6361.10	165.87	83732.23	4305.00	3311.01	102.02
35K1	342.0	348.0	10.0	15.0	139.03	109.10	31247.91	1827.40	1001.17	149.92	10542.21	605.87	459.67	87.08
35X1.5	346.0	349.0	11.0	17.0	156.41	122.80	35711.23	2064.20	1135.84	151.10	12051.44	690.63	524.08	87.78
35K2	350.0	350.0	12.0	19.0	173.87	136.50	40295.09	2302.60	1272.61	152.23	13585.82	776.33	589.29	88.39
35K3	355.0	351.0	13.5	21.5	196.48	154.20	46230.77	2604.60	1448.66	153.39	15506.81	883.58	671.24	88.84
35K4	360.0	352.0	15.0	24.0	219.19	172.10	52353.70	2908.50	1627.80	154.55	17459.86	992.04	754.25	89.25
35K5	365.0	353.0	16.5	26.5	242.00	190.00	58667.44	3214.70	1810.04	155.70	19445.30	1101.72	838.34	89.64
35K6	369.0	360.0	18.0	28.5	264.79	207.90	64960.86	3520.90	1991.80	156.63	22183.47	1232.42	938.35	91.53
35K7	376.0	361.0	20.0	32.0	296.87	233.10	74398.83	3957.40	2256.32	158.31	25119.61	1391.67	1060.65	91.99
35K8	382.0	362.0	22.0	35.0	325.47	255.50	82894.78	4340.00	2491.96	159.59	27708.51	1530.86	1168.17	92.27
35K9	389.0	363.0	24.0	38.5	357.82	280.90	93053.12	4784.20	2767.25	161.26	30738.03	1693.56	1293.57	92.68
35K10	396.0	364.0	26.5	42.0	391.87	307.60	103736.94	5239.20	3054.44	162.70	33819.63	1858.22	1421.64	92.90
35K11	404.0	374.0	29.0	46.0	437.99	343.80	118982.06	5890.20	3458.40	164.82	40183.36	2148.84	1644.63	95.78
35K12	414.0	375.0	32.0	51.0	485.77	381.30	135721.11	6556.60	3886.58	167.15	44924.28	2395.96	1836.42	96.17
35K13	424.0	376.0	35.0	56.0	533.75	419.00	153322.14	7232.20	4326.20	169.49	49742.08	2645.86	2030.81	96.54
35K14	434.0	377.0	38.0	61.0	581.93	456.80	171810.18	7917.50	4777.34	171.83	54637.74	2898.55	2227.81	96.90
35K15	446.0	378.0	42.0	67.0	640.99	503.20	195206.29	8753.70	5336.35	174.51	60526.72	3202.47	2466.48	97.17

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	S <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см
35K16	458.0	392.0	46.0	73.0	719.27	564.60	227053.17	9915.00	6094.32	177.67	73566.95	3753.42	2891.61	101.13
35K17	472.0	393.0	50.0	80.0	788.23	618.80	258357.05	10947.30	6796.66	181.04	81286.57	4136.72	3191.54	101.55
35K18	488.0	394.0	55.0	88.0	868.47	681.80	296560.11	12154.10	7629.66	184.79	90173.86	4577.35	3538.66	101.90
35K19	506.0	395.0	60.0	97.0	956.93	751.20	342451.59	13535.60	8591.51	189.17	100237.84	5075.33	3929.92	102.35
35K20	520.0	409.0	65.0	104.0	1056.95	829.70	392963.38	15114.00	9664.42	192.82	119352.51	5836.31	4520.43	106.26
35K21	540.0	411.0	71.0	114.0	1162.03	912.20	454051.02	16816.70	10869.85	197.67	132896.31	6466.97	5017.71	106.94
35K22	562.0	413.0	77.0	125.0	1276.17	1001.80	526659.93	18742.40	12243.01	203.15	148011.27	7167.62	5568.89	107.69
35K23	580.0	426.0	84.0	134.0	1407.19	1104.70	606878.23	20926.80	13777.86	207.67	174271.92	8181.78	6362.61	111.29
35K24	604.0	430.0	92.0	146.0	1546.07	1213.70	704826.44	23338.60	15522.09	213.51	195579.56	9096.72	7087.61	112.47
40K1	394.0	398.0	11.0	18.0	186.81	146.70	56145.31	2850.00	1559.22	173.36	18922.62	950.89	720.40	100.64
40K2	400.0	400.0	13.0	21.0	218.69	171.70	66621.41	3331.10	1836.23	174.54	22412.67	1120.63	849.93	101.23
40K3	406.0	403.0	16.0	24.0	254.87	200.10	78039.22	3844.30	2139.84	174.98	26200.19	1300.26	988.59	101.39
40K4	414.0	405.0	18.0	28.0	295.39	231.90	92771.14	4481.70	2513.15	177.22	31026.87	1532.19	1165.56	102.49
40K4,5	420.0	403.0	20.0	31.0	325.61	255.60	103629.70	4934.80	2786.46	178.40	33850.08	1679.90	1279.67	101.96
40K5	429.0	400.0	23.0	35.5	370.49	290.80	120290.27	5607.90	3198.49	180.19	37914.87	1895.74	1447.08	101.16
40K6	438.0	370.0	25.0	40.0	389.65	305.90	128432.35	5864.50	3381.88	181.55	33828.59	1828.57	1400.59	93.18
40K7	448.0	371.0	28.0	45.0	438.29	344.10	148100.16	6611.60	3848.78	183.82	38379.67	2068.98	1587.47	93.58
40K8	458.0	372.0	31.0	50.0	487.13	382.40	168699.38	7366.80	4327.20	186.09	43005.94	2312.15	1777.05	93.96
40K9	470.0	373.0	35.0	56.0	547.21	429.60	194740.01	8286.80	4920.70	188.65	48584.93	2605.09	2007.28	94.23
40K10	484.0	374.0	39.0	63.0	615.01	482.80	226537.95	9361.10	5620.76	191.92	55131.74	2948.22	2276.18	94.68
40K11	494.0	392.0	43.0	68.0	691.21	542.60	261626.63	10592.20	6402.77	194.55	68534.68	3496.67	2700.52	99.57
40K12	510.0	393.0	48.0	76.0	773.35	607.10	303779.05	11912.90	7286.50	198.19	77250.09	3931.30	3043.64	99.94
40K13	528.0	394.0	53.0	85.0	863.69	678.00	354176.39	13415.80	8303.29	202.50	87133.42	4423.02	3430.99	100.44
40K14	548.0	395.0	59.0	95.0	965.87	758.20	414486.60	15127.30	9480.79	207.15	98243.26	4974.34	3868.52	100.85
40K15	564.0	410.0	65.0	103.0	1081.45	848.90	482318.02	17103.50	10811.51	211.18	119192.55	5814.27	4525.42	104.98
40K16	588.0	412.0	72.0	115.0	1209.51	949.50	569246.79	19362.10	12395.01	216.94	135224.96	6564.32	5120.62	105.74
40K17	616.0	414.0	80.0	129.0	1358.67	1066.60	679972.83	22077.00	14322.16	223.71	154171.56	7447.90	5823.25	106.52
40K18	638.0	430.0	87.0	140.0	1519.61	1192.90	800682.16	25099.80	16419.75	229.54	187578.96	8724.60	6820.27	111.10
40K19	668.0	435.0	96.0	155.0	1696.33	1331.60	952172.58	28508.20	18868.64	236.92	215398.09	9903.36	7755.88	112.68

### А.3. Уголки стальные горячекатаные равнополочные по ГОСТ 8509—93

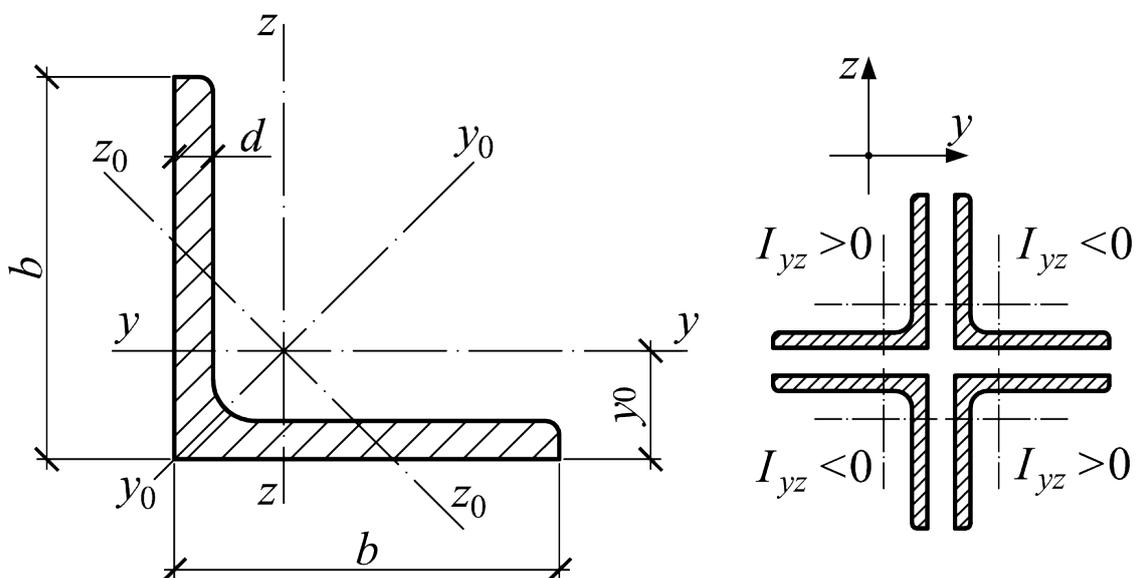


Рис. А.3. Уголок стальной горячекатаный равнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина полки;
- $t$  — толщина полки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $y_0$  — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
- $I_{yx}$  — центробежный момент инерции;
- $i$  — радиус инерции.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м равнополочного уголка вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .

Табл. А.3. Уголки стальные горячекатаные равнополочные

№	b мм	d мм	A см <sup>2</sup>	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>y0</sub> см <sup>4</sup>	i <sub>y0</sub> см	I <sub>z0</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z0</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z0</sub> см	I <sub>yz</sub> см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> см	Масса 1 п. м. кг
2	20	3	1.13	0.40	0.28	0.59	0.63	0.75	0.17	0.20	0.39	0.23	0.60	0.89
2	20	4	1.46	0.50	0.37	0.58	0.78	0.73	0.22	0.24	0.38	0.28	0.64	1.15
2,5	25	3	1.43	0.81	0.46	0.75	1.29	0.95	0.34	0.33	0.49	0.47	0.73	1.12
2,5	25	4	1.86	1.03	0.59	0.74	1.62	0.93	0.44	0.41	0.48	0.59	0.76	1.46
2,8	28	3	1.62	1.16	0.58	0.85	1.84	1.07	0.48	0.42	0.55	0.68	0.80	1.27
3	30	3	1.74	1.45	0.67	0.91	2.30	1.15	0.60	0.53	0.59	0.85	0.85	1.36
3	30	4	2.27	1.84	0.87	0.90	2.92	1.13	0.77	0.61	0.58	1.08	0.89	1.78
3,2	32	3	1.86	1.77	0.77	0.97	2.80	1.23	0.74	0.59	0.63	1.03	0.89	1.46
3,2	32	4	2.43	2.26	1.00	0.96	3.58	1.21	0.94	0.71	0.62	1.32	0.94	1.91
3,5	35	3	2.04	2.35	0.93	1.07	3.72	1.35	0.97	0.71	0.69	1.37	0.97	1.60
3,5	35	4	2.67	3.01	1.21	1.06	4.76	1.33	1.25	0.88	0.68	1.75	1.01	2.10
3,5	35	5	3.28	3.61	1.47	1.05	5.71	1.32	1.52	1.02	0.68	2.10	1.05	2.58
4	40	3	2.35	3.55	1.22	1.23	5.63	1.55	1.47	0.95	0.79	2.08	1.09	1.85
4	40	4	3.08	4.58	1.60	1.22	7.26	1.53	1.90	1.19	0.78	2.68	1.13	2.42
4	40	5	3.79	5.53	1.95	1.21	8.75	1.52	2.30	1.39	0.78	3.22	1.17	2.98
4,5	45	3	2.65	5.13	1.56	1.39	8.13	1.75	2.12	1.24	0.89	3.00	1.21	2.08
4,5	45	4	3.48	6.63	2.04	1.38	10.52	1.74	2.74	1.54	0.89	3.89	1.26	2.73
4,5	45	5	4.29	8.03	2.51	1.37	12.74	1.72	3.33	1.81	0.88	4.71	1.30	3.37
5	50	3	2.96	7.11	1.94	1.55	11.27	1.95	2.95	1.57	1.00	4.16	1.33	2.32
5	50	4	3.89	9.21	2.54	1.54	14.63	1.94	3.80	1.95	0.99	5.42	1.38	3.05
5	50	5	4.80	11.20	3.13	1.53	17.77	1.92	4.63	2.30	0.98	6.57	1.42	3.77
5	50	6	5.69	13.07	3.69	1.52	20.72	1.91	5.43	2.63	0.98	7.65	1.46	4.47
5,6	56	4	4.38	13.10	3.21	1.73	20.79	2.18	5.41	2.52	1.11	7.69	1.52	3.44

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.3

№	b	d	A	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_{y0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y0}$ см	$I_{z0}$ см <sup>4</sup>	$W_{z0}$ см <sup>3</sup>	$i_{z0}$ см	$I_{yx}$ см <sup>4</sup>	$y_0$ см	Масса 1 п. м. кг
5,6	56	5	5.41	15.97	3.96	1.72	25.36	2.16	6.59	2.97	1.10	9.41	1.57	4.25
6,3	63	4	4.96	18.86	4.09	1.95	29.90	2.45	7.81	3.26	1.25	11.00	1.69	3.90
6,3	63	5	6.13	23.10	5.05	1.94	36.80	2.44	9.52	3.87	1.25	13.70	1.74	4.81
6,3	63	6	7.28	27.06	5.98	1.93	42.91	2.43	11.18	4.44	1.24	15.90	1.78	5.72
7	70	4.5	6.20	29.04	5.67	2.16	46.03	2.72	12.04	4.53	1.39	17.00	1.88	4.87
7	70	5	6.86	31.94	6.27	2.16	50.67	2.72	13.22	4.92	1.39	18.70	1.90	5.38
7	70	6	8.15	37.58	7.43	2.15	59.64	2.71	15.52	5.66	1.38	22.10	1.94	6.39
7	70	7	9.42	42.98	8.57	2.14	68.19	2.69	17.77	6.31	1.37	25.20	1.99	7.39
7	70	8	10.67	48.16	9.68	2.12	76.35	2.68	19.97	6.99	1.37	28.20	2.02	8.37
7,5	75	5	7.39	39.53	7.21	2.31	62.65	2.91	16.41	5.74	1.49	23.10	2.02	5.80
7,5	75	6	8.78	46.57	8.57	2.30	73.87	2.90	19.28	6.62	1.48	27.30	2.06	6.89
7,5	75	7	10.15	53.34	9.89	2.29	84.61	2.89	22.07	7.43	1.47	31.20	2.10	7.96
7,5	75	8	11.50	59.84	11.18	2.28	94.89	2.87	24.80	8.16	1.47	35.00	2.15	9.02
7,5	75	9	12.83	66.10	12.43	2.27	104.72	2.86	27.48	8.91	1.46	38.60	2.18	10.07
8	80	5.5	8.63	52.68	9.03	2.47	83.56	з.и	21.80	7.10	1.59	30.90	2.17	6.78
8	80	6	9.38	56.97	9.80	2.47	90.40	з.и	23.54	7.60	1.58	33.40	2.19	7.36
8	80	7	10.85	65.31	11.32	2.45	103.60	3.09	26.97	8.55	1.58	38.30	2.23	8.51
8	80	8	12.30	73.36	12.80	2.44	116.39	3.08	30.32	9.44	1.57	43.00	2.27	9.65
9	90	6	10.61	82.10	12.49	2.78	130.00	3.50	33.97	9.88	1.79	48.10	2.43	8.33
9	90	7	12.28	94.30	14.45	2.77	149.67	3.49	38.94	11.15	1.78	55.40	2.47	9.64
9	90	8	13.93	106.11	16.36	2.76	168.42	3.48	43.80	12.34	1.77	62.30	2.51	10.93
9	90	9	15.60	118.00	18.29	2.75	186.00	3.46	48.60	13.48	1.77	68.00	2.55	12.20
10	100	6.5	12.82	122.10	16.69	3.09	193.46	3.89	50.73	13.38	1.99	71.40	2.68	10.06
10	100	7	13.75	130.59	17.90	3.08	207.01	3.88	54.16	14.13	1.98	76.40	2.71	10.79

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.3

№	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>I<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>I<sub>y0</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y0</sub></i> см	<i>I<sub>z0</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>z0</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>z0</sub></i> см	<i>I<sub>yx</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>y<sub>0</sub></i> см	Масса I п. м. кг
10	100	8	15.60	147.19	20.30	3.07	233.46	3.87	60.92	15.66	1.98	86.30	2.75	12.25
10	100	10	19.24	178.95	24.97	3.05	283.83	3.84	74.08	18.51	1.96	110.00	2.83	15.10
10	100	12	22.80	208.90	29.47	3.03	330.95	3.81	86.84	21.10	1.95	122.00	2.91	17.90
10	100	14	26.28	237.15	33.83	3.00	374.98	3.78	99.32	23.49	1.94	138.00	2.99	20.63
10	100	16	29.68	263.82	38.04	2.98	416.04	3.74	111.61	25.79	1.94	152.00	3.06	23.30
11	110	7	15.15	175.61	21.83	3.40	278.54	4.29	72.68	17.36	2.19	106.00	2.96	11.89
11	110	8	17.20	198.17	24.77	3.39	314.51	4.28	81.83	19.29	2.18	116.00	3.00	13.50
12,5	125	8	19.69	294.36	32.20	3.87	466.76	4.87	121.98	25.67	2.49	172.00	3.36	15.46
12,5	125	9	22.00	327.48	36.00	3.86	520.00	4.86	135.88	28.26	2.48	192.00	3.40	17.30
12,5	125	10	24.33	359.82	39.74	3.85	571.04	4.84	148.59	30.45	2.47	211.00	3.45	19.10
12,5	125	12	28.89	422.23	47.06	3.82	670.02	4.82	174.43	34.94	2.46	248.00	3.53	22.68
12,5	125	14	33.37	481.76	54.17	3.80	763.90	4.78	199.62	39.10	2.45	282.00	3.61	26.20
12,5	125	16	37.77	538.56	61.09	3.78	852.84	4.75	224.29	43.10	2.44	315.00	3.68	29.65
14	140	9	24.72	465.72	45.55	4.34	739.42	5.47	192.03	35.92	2.79	274.00	3.76	19.41
14	140	10	27.33	512.29	50.32	4.33	813.62	5.46	210.96	39.05	2.78	301.00	3.82	21.45
14	140	12	32.49	602.49	59.66	4.31	956.98	5.43	248.01	44.97	2.76	354.00	3.90	25.50
16	160	10	31.43	774.24	66.19	4.96	1229.10	6.25	319.33	52.52	3.19	455.00	4.30	24.67
16	160	11	34.42	844.21	72.44	4.95	1340.06	6.24	347.77	56.53	3.18	496.00	4.35	27.02
16	160	12	37.39	912.89	78.62	4.94	1450.00	6.23	375.78	60.53	3.17	537.00	4.39	29.35
16	160	14	43.57	1046.47	90.77	4.92	1662.13	6.20	430.81	68.15	3.16	615.00	4.47	34.20
16	160	16	49.07	1175.19	102.64	4.89	1865.73	6.17	484.64	75.92	3.14	690.00	4.55	38.52
16	160	18	54.79	1290.24	114.24	4.87	2061.03	6.13	537.46	82.08	3.13	771.00	4.63	43.01
16	160	20	60.40	1418.85	125.60	4.85	2248.26	6.10	589.43	90.02	3.12	830.00	4.70	47.41
18	180	11	38.80	1216.44	92.47	5.60	1933.10	7.06	499.78	72.86	3.59	716.00	4.85	30.47

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.3

№	b	d	A	$I_y$	$W_y$	$i_y$	$I_{y0}$	$i_{y0}$	$I_{z0}$	$W_{z0}$	$i_{z0}$	$I_{yx}$	$y_0$	Масса
	мм	мм	см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	1 п. м. кг
18	180	12	42.19	1316.62	100.41	5.59	2092.78	7.04	540.45	78.15	3.58	776.00	4.89	33.12
20	200	12	47.10	1822.78	124.61	6.22	2896.16	7.84	749.40	98.68	3.99	1073.00	5.37	36.97
20	200	13	50.85	1960.77	134.44	6.21	3116.18	7.83	805.35	105.07	3.98	1156.00	5.42	39.92
20	200	14	54.60	2097.00	144.17	6.20	3333.00	7.81	861.00	111.50	3.97	1236.00	5.46	42.80
20	200	16	61.98	2362.57	163.37	6.17	3755.39	7.78	969.74	123.77	3.96	1393.00	5.54	48.65
20	200	20	76.54	2871.47	200.37	6.12	4860.42	7.72	1181.92	146.62	3.93	1689.00	5.70	60.08
20	200	25	94.29	3466.21	245.59	6.06	5494.04	7.63	1438.38	172.68	3.91	2028.00	5.89	74.02
20	200	30	111.54	4019.60	288.57	6.00	6351.05	7.55	1698.16	193.06	3.89	2332.00	6.07	87.56
22	220	14	60.38	2814.36	175.18	6.83	4470.15	8.60	1158.56	138.62	4.38	1655.00	5.91	47.40
22	220	16	68.58	3175.44	198.71	6.80	5045.37	8.58	1305.52	153.34	4.36	1869.00	6.02	53.83
25	250	16	78.40	4717.10	258.43	7.76	7492.10	9.78	1942.09	203.45	4.98	2775.00	6.75	61.55
25	250	18	87.72	5247.24	288.82	7.73	8336.69	9.75	2157.78	223.39	4.96	3089.00	6.83	68.86
25	250	20	96.96	5764.87	318.76	7.71	9159.73	9.72	2370.01	242.52	4.94	3395.00	6.91	76.11
25	250	22	106.12	6270.32	348.26	7.69	9961.30	9.69	2579.04	260.52	4.93	3691.00	7.00	83.31
25	250	25	119.71	7006.39	391.72	7.65	11125.52	9.64	2887.26	287.14	4.91	4119.00	7.11	93.97
25	250	28	133.12	7716.86	434.25	7.61	12243.84	9.59	3189.89	311.98	4.90	4527.00	7.23	104.50
25	250	30	141.96	8176.82	462.11	7.59	12964.66	9.56	3388.98	327.82	4.89	4788.00	7.31	111.44
25	250	35	163.71	9281.05	530.11	7.53	14682.73	9.47	3879.37	366.13	4.87	5401.68	7.53	128.51

**А.4. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные по ГОСТ 8510—86**

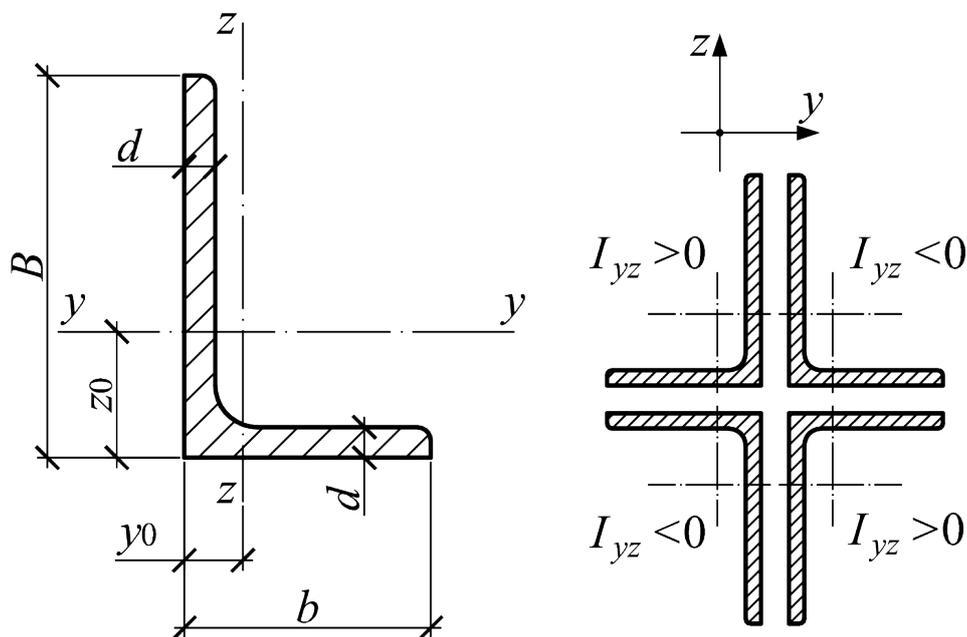


Рис. А.4. Уголок стальной горячекатаный неравнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

- $h$  — высота (швеллера);
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — толщина полки;
- $y_0$  — расстояние от оси  $z - z$  до наружной грани стенки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $i$  — радиус инерции;
- $S_y$  — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и справочные величины вычислены по номинальным размерам. При вычислении массы 1 м уголка плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .

Табл. А.4. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные

№	B мм	b мм	d мм	A см <sup>2</sup>	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см	y <sub>0</sub> см	z <sub>0</sub> см	I <sub>yz</sub> см <sup>4</sup>	tg α	Масса 1 п. м. кг
2,5/1,6	25	16	3	1.16	0.70	0.43	0.78	0.22	0.19	0.44	0.42	0.86	0.22	0.392	0.91
3/2*	30	20	3	1.43	1.27	0.62	0.94	0.45	0.30	0.56	0.51	1.0	0.43	0.427	1.12
3/2*	30	20	4	1.86	1.61	0.82	0.93	0.56	0.39	0.55	0.54	1.04	0.54	0.421	1.46
3,2/2	32	20	3	1.49	1.52	0.72	1.01	0.46	0.30	0.55	0.49	1.08	0.47	0.382	1.17
3,2/2	32	20	4	1.94	1.93	0.93	1.00	0.57	0.39	0.54	0.53	1.12	0.59	0.374	1.52
4/2,5	40	25	3	1.89	3.06	1.14	1.27	0.93	0.49	0.70	0.59	1.32	0.96	0.385	1.48
4/2,5	40	25	4	2.47	3.93	1.49	1.26	1.18	0.63	0.69	0.63	1.37	1.22	0.281	1.94
4/2,5	40	25	5	3.03	4.73	1.82	1.25	1.41	0.77	0.68	0.66	1.41	1.44	0.374	2.37
4/3*	40	30	4	2.67	4.18	1.54	1.25	2.01	0.91	0.87	0.78	1.28	1.68	0.544	2.26
4/3*	40	30	5	3.28	5.04	1.88	1.24	2.41	1.11	0.86	0.82	1.32	2.00	0.539	2.46
4,5/2,8	45	28	3	2.14	4.41	1.45	1.48	1.32	0.61	0.79	0.64	1.47	1.38	0.382	1.68
4,5/2,8	45	28	4	2.80	5.68	1.90	1.42	1.69	0.80	0.78	0.68	1.51	1.77	0.379	2.20
5/3,2	50	32	3	2.42	6.18	1.82	1.60	1.99	0.81	0.91	0.72	1.60	2.01	0.403	1.9
5/3,2	50	32	4	3.17	7.98	2.38	1.59	2.56	1.05	0.90	0.76	1.65	2.59	0.401	2.4
5,6/3,6	56	36	4	3.58	11.37	3.01	1.78	3.70	1.34	1.02	0.84	1.82	3.74	0.406	2.81
5,6/3,6	56	36	5	4.41	13.82	3.70	1.77	4.48	1.65	1.01	0.88	1.87	4.50	0.404	3.46
6,3/4,0	63	40	4	4.04	16.33	3.83	2.01	5.16	1.67	1.13	0.91	2.03	5.25	0.397	3.17
6,3/4,0	63	40	5	4.98	19.91	4.72	2.00	6.26	2.05	1.12	0.95	2.08	6.41	0.396	3.91
6,3/4,0	63	40	6	5.90	23.31	5.58	1.99	7.29	2.42	1.11	0.99	2.12	7.44	0.393	4.63
6,3/4,0	63	40	8	7.68	29.60	7.22	1.96	9.15	3.12	1.09	1.07	2.20	9.27	0.386	6.03
6,5/5*	65	50	5	5.56	23.41	5.20	2.05	12.08	3.23	1.47	1.26	2.00	9.77	0.576	4.36
6,5/5*	65	50	6	6.60	27.46	6.16	2.04	14.12	3.82	1.46	1.30	2.04	11.46	0.575	5.18
6,5/5*	65	50	7	7.62	31.32	7.08	2.03	16.05	4.38	1.45	1.34	2.08	12.94	0.571	5.98

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.4

№	B	b	d	A	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см	$y_0$ см	$z_0$ см	$I_{yx}$ см <sup>4</sup>	$\text{tg } \alpha$	Масса 1 п. м. кг
6,5/5*	65	50	8	8.62	35.00	7.99	2.02	18.88	4.93	1.44	1.37	2.12	13.61	0.570	6.77
7/4,5	70	45	5	5.59	27.76	5.88	2.23	9.05	2.62	1.27	1.05	2.28	9.12	0.406	4.39
7,5/5	75	50	5	6.11	34.81	6.81	2.39	12.47	3.25	1.43	1.17	2.39	12.00	0.436	4.79
7,5/5	75	50	6	7.25	40.92	8.08	2.38	14.60	3.85	1.42	1.21	2.44	14.10	0.435	5.69
7,5/5	75	50	7*	8.37	46.77	9.31	2.36	16.61	4.43	1.41	1.25	2.48	16.18	0.435	6.57
7,5/5	75	50	8	9.47	52.38	10.52	2.35	18.52	4.88	1.40	1.29	2.52	17.80	0.430	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.64	7.71	2.56	12.68	3.28	1.41	1.13	2.60	13.20	0.387	4.49
8/5	80	50	6	7.55	48.98	9.15	2.55	14.85	3.88	1.40	1.17	2.65	15.50	0.386	5.92
8/5	80	50	6	8.15	52.06	9.42	2.53	25.18	5.58	1.76	1.49	2.47	20.98	0.547	6.39
8/6*	80	60	7	9.42	59.61	10.87	2.52	28.74	6.43	1.75	1.53	2.52	24.01	0.546	7.39
8/6*	80	60	8	10.67	66.88	12.38	2.50	32.15	7.26	1.74	1.57	2.56	26.83	0.544	8.37
9/5,6	90	56	5.5	7.86	65.28	10.74	2.88	19.67	4.53	1.58	1.26	2.92	20.54	0.384	6.17
9/5,6	90	56	6	8.54	70.58	11.66	2.88	21.22	4.91	1.58	1.28	2.95	22.23	0.384	6.70
9/5,6	90	56	8	11.18	90.87	15.24	2.85	27.08	6.39	1.56	1.36	3.04	28.33	0.380	8.77
10/6,3	100	63	6	9.58	98.29	14.52	3.20	30.58	6.27	1.79	1.42	3.23	31.50	0.393	7.53
10/6,3	100	63	7	11.09	112.86	16.78	3.19	34.99	7.23	1.78	1.46	3.28	36.10	0.392	8.70
10/6,3	100	63	8	12.57	126.96	19.01	3.18	39.21	8.17	1.77	1.50	3.32	40.50	0.391	9.87
10/6,3	100	63	10	15.47	153.95	23.32	3.15	47.18	9.99	1.75	1.58	3.40	48.60	0.387	12.14
10/6,5*	100	65	7	11.23	114.05	16.87	3.19	38.32	7.70	1.85	1.52	3.24	38.00	0.415	8.81
10/6,5*	100	65	8	12.73	128.31	19.11	3.18	42.96	8.70	1.84	1.56	3.28	42.64	0.414	9.99
10/6,5*	100	65	10	15.67	155.52	23.45	3.15	51.68	10.64	1.82	1.64	3.37	51.18	0.410	12.30
11/7	110	70	6.5	11.45	142.42	19.11	3.53	45.61	8.42	2.00	1.58	3.55	46.80	0.402	8.98
11/7	110	70	8	13.93	171.54	23.22	3.51	54.64	10.20	1.98	1.64	3.61	55.90	0.400	10.93
12,5/8	125	80	7	14.06	226.53	26.67	4.01	73.73	11.89	2.29	1.80	4.01	74.70	0.407	11.04

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы А.4

№	B мм	b мм	d мм	A см <sup>2</sup>	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>z</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см	y <sub>0</sub> см	z <sub>0</sub> см	I <sub>yx</sub> см <sup>4</sup>	tg α	Масса 1 п. м. кг
12,5/8	125	80	8	15.98	225.62	30.26	4.00	80.95	13.47	2.28	1.84	4.05	84.10	0.406	12.58
12,5/8	125	80	10	19.70	311.61	37.27	3.98	100.47	16.52	2.26	1.92	4.14	102.00	0.404	15.47
12,5/8	125	80	12	23.36	364.79	44.07	3.95	116.84	19.46	2.24	2.00	4.22	118.00	0.400	18.34
14/9	140	90	8	18.00	363.68	38.25	4.49	119.79	17.19	2.58	2.03	4.49	121.00	0.411	14.13
14/9	140	90	10	22.24	444.45	47.19	4.47	145.54	21.14	2.58	2.12	4.58	147.00	0.409	17.46
16/10	160	100	9	22.87	605.97	56.04	5.15	186.03	23.96	2.85	2.24	5.19	194.00	0.391	17.96
16/10	160	100	10	25.28	666.59	61.91	5.13	204.09	26.42	2.84	2.28	5.23	213.00	0.390	19.85
16/10	160	100	12	30.04	784.22	73.42	5.11	238.75	31.23	2.82	2.36	5.32	249.00	0.388	23.58
16/10	160	100	14	34.72	897.19	84.65	5.08	271.60	35.89	2.80	2.43	5.40	282.00	0.385	27.26
18/11	180	110	10	28.33	952.28	78.59	5.80	276.37	32.27	3.12	2.44	5.88	295.00	0.376	22.20
18/11	180	110	12	33.69	1122.56	93.33	5.77	324.09	38.20	3.10	2.52	5.97	348.00	0.374	26.40
20/12,5	200	125	11	34.87	1449.02	107.31	6.45	446.36	45.98	3.58	2.79	6.50	465.00	0.392	27.37
20/12,5	200	125	12	37.89	1568.19	116.51	6.43	481.93	49.85	3.57	2.83	6.54	503.00	0.392	29.74
20/12,5	200	125	14	43.87	1800.83	134.64	6.41	550.77	57.43	3.54	2.91	6.62	575.00	0.390	34.43
20/12,5	200	125	16	49.77	2026.08	152.41	6.38	616.66	64.83	3.52	2.99	6.71	643.00	0.388	39.07

\* Уголки изготавливают по требованию потребителя

## А.5. Двутавры стальные горячекатаные по ГОСТ 8239—89

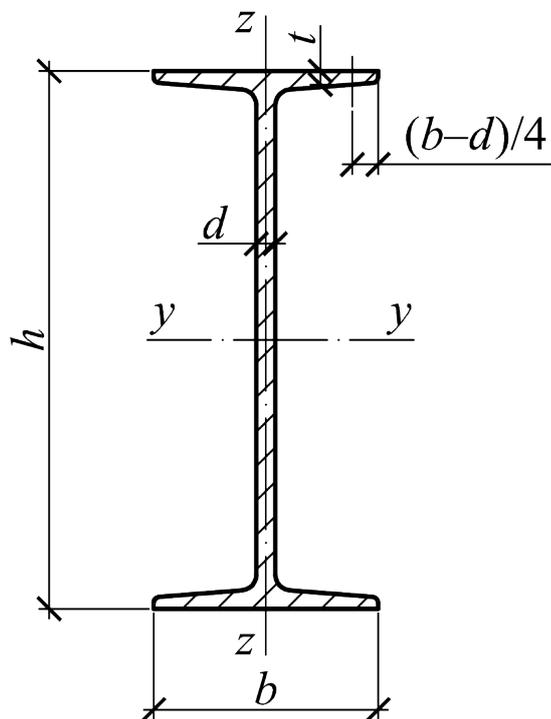


Рис. А.5. Двутавр стальной горячекатаный

**ВНИМАНИЕ!** ГОСТ утратил силу на территории Российской Федерации с 30 ноября 2018 года в связи с изданием Приказа Росстандарта от 30.11.2018 № 1047-ст. Взамен введён ГОСТ Р 57837—2017.

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

- $h$  — высота (двутавра);
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — толщина полки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $i$  — радиус инерции;
- $S$  — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .

Табл. А.5. Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ утратил силу на территории РФ)

№	<i>h</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>t</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	<i>I<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>S<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>I<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>z</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см
10	100	55	4.5	7.2	12.0	9.46	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22
12	120	64	4.8	7.3	14.7	11.50	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38
14	140	73	4.9	7.5	17.4	13.70	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.50	1.55
16	160	81	5.0	7.8	20.2	15.90	873	109.0	6.57	62.3	58.6	14.50	1.70
18	180	90	5.1	8.1	23.4	18.40	1290	143.0	7.42	81.4	82.6	18.40	1.88
20	200	100	5.2	8.4	26.8	21.00	1840	184.0	8.28	104.0	115.0	23.10	2.07
22	220	110	5.4	8.7	30.6	24.00	2550	232.0	9.13	131.0	157.0	28.60	2.27
24	240	115	5.6	9.5	34.8	27.30	3460	289.0	9.97	163.0	198.0	34.50	2.37
27	270	125	6.0	9.8	40.2	31.50	5010	371.0	11.20	210.0	260.0	41.50	2.54
30	300	135	6.5	10.2	46.5	36.50	7080	472.0	12.30	268.0	337.0	49.90	2.69
33	330	140	7.0	11.2	53.8	42.20	9840	597.0	13.50	339.0	419.0	59.90	2.79
36	360	145	7.5	12.3	61.9	48.60	13380	743.0	14.70	423.0	516.0	71.10	2.89
40	400	155	8.3	13.0	72.6	57.00	19062	953.0	16.20	545.0	667.0	86.10	3.03
45	450	160	9.0	14.2	84.7	66.50	27696	1231.0	18.10	708.0	808.0	101.00	3.09
50	500	170	10.0	15.2	100.0	78.50	39727	1589.0	19.90	919.0	1043.0	123.00	3.23
55	550	180	11.0	16.5	118.0	92.60	55962	2035.0	21.80	1181.0	1356.0	151.00	3.39
60	600	190	12.0	17.8	138.0	108.00	76806	2560.0	23.60	1491.0	1725.0	182.00	3.54

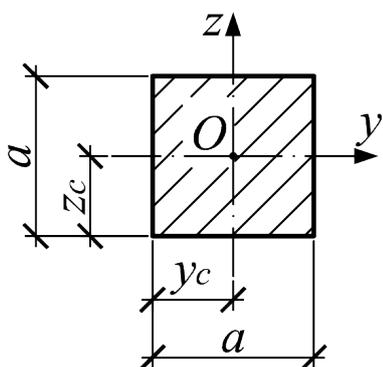
## Тема В. Геометрические характеристики простейших фигур

Принятые обозначения:

- $A$  — площадь фигуры;
- $y, z$  — главные оси;
- $I_y, I_z$  — моменты инерции;
- $I_y$  — центробежный момент инерции;
- $W_y, W_z$  — моменты сопротивления;
- $i_y, i_z$  — радиусы инерции.

Значок «\*» у момент сопротивления  $W$  приводится для наиболее удалённых волокон от центра тяжести сечения.

### Квадрат



$$A = a^2;$$

$$y_c = z_c = \frac{a}{2};$$

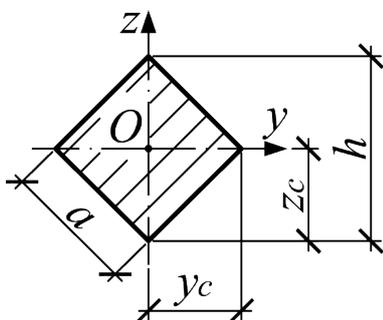
$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12};$$

$$I_{yz} = 0;$$

$$W_y = W_z = \frac{a^3}{6};$$

$$i_y = i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0.289a.$$

### Квадрат, поставленный на ребро



$$A = a^2;$$

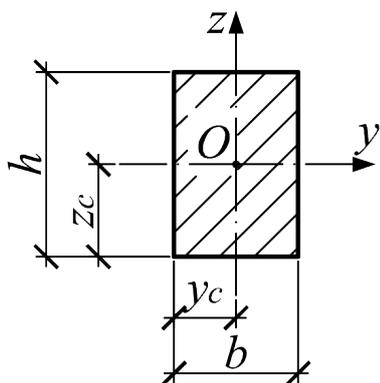
$$y_c = z_c = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0.71a;$$

$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}; \quad I_{yz} = 0;$$

$$W_y = W_z = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3;$$

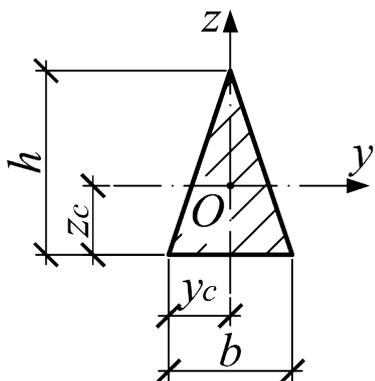
$$i_y = i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0.289a.$$

## Прямоугольник



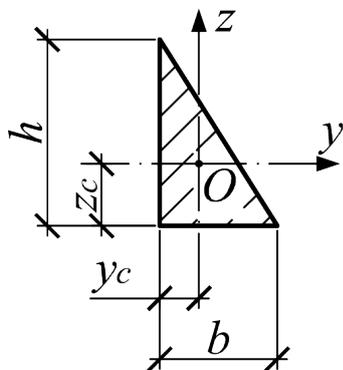
$$\begin{aligned}
 A &= bh; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; \quad z_c = \frac{h}{2}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{12}; \quad I_z = \frac{hb^3}{12}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_y &= \frac{bh^2}{6}; \quad W_z = \frac{hb^2}{6}; \\
 i_y &= 0.289h; \quad i_z = 0.289b.
 \end{aligned}$$

## Равнобедренный треугольник



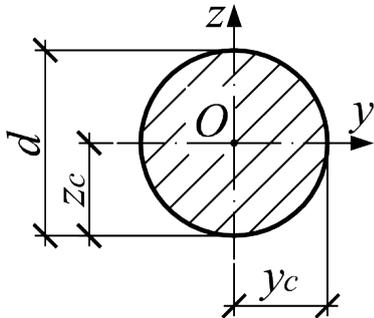
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{bh}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; \quad z_c = \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{48}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_{y^*} &= \frac{bh^2}{24} \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_z = \frac{b}{2\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

## Прямоугольный треугольник



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{bh}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{3}; \quad z_c = \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{36}; \\
 I_{yz} &= \pm \frac{b^2h^2}{72}; \\
 W_{y^*} &= \frac{bh^2}{24}; \quad W_{z^*} = \frac{hb^2}{24}; \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_z = \frac{b}{3\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

### Круг



$$A = \frac{\pi d^2}{4};$$

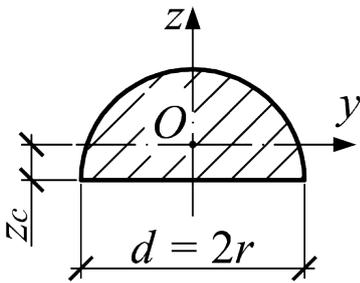
$$y_c = z_c = \frac{d}{2};$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}; \quad I_\rho = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}; \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$i_y = i_z = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}.$$

### Полукруг



$$A = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2};$$

$$y_c = \frac{d}{2} = r; \quad z_c = \frac{2d}{3\pi} = \frac{4r}{3\pi};$$

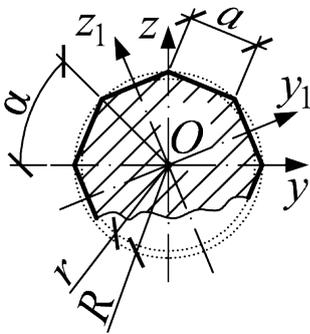
$$I_y = \frac{d^4}{16} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right); \quad I_z = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8};$$

$$I_{yz} = 0;$$

$$W_{y*} \approx 0.0239d^3; \quad W_z = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8}$$

$$i_y \approx 0.132d; \quad i_z = \frac{d}{4}.$$

### Правильный многоугольник с n сторонами



$$A = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg} \alpha = nr^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{nar}{2};$$

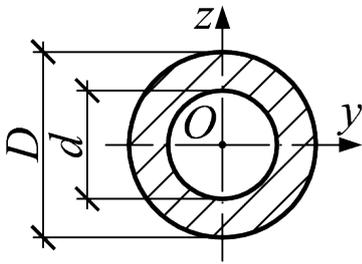
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}; \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha};$$

$$I_y = I_z = \frac{nar}{48} (6R^2 - a^2) = \frac{nar}{96} (12r^2 + a^2);$$

$$I_{yz} = 0;$$

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}}.$$

### Кольцо



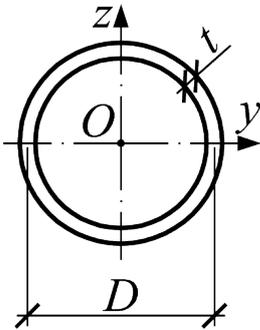
$$A = \frac{\pi d^2}{4} (1 - \alpha^2); \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0.05 D^4 (1 - \alpha^4);$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1 D^3 (1 - \alpha^4);$$

$$i_y = i_z = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

### Тонкое кольцо $t \ll D$



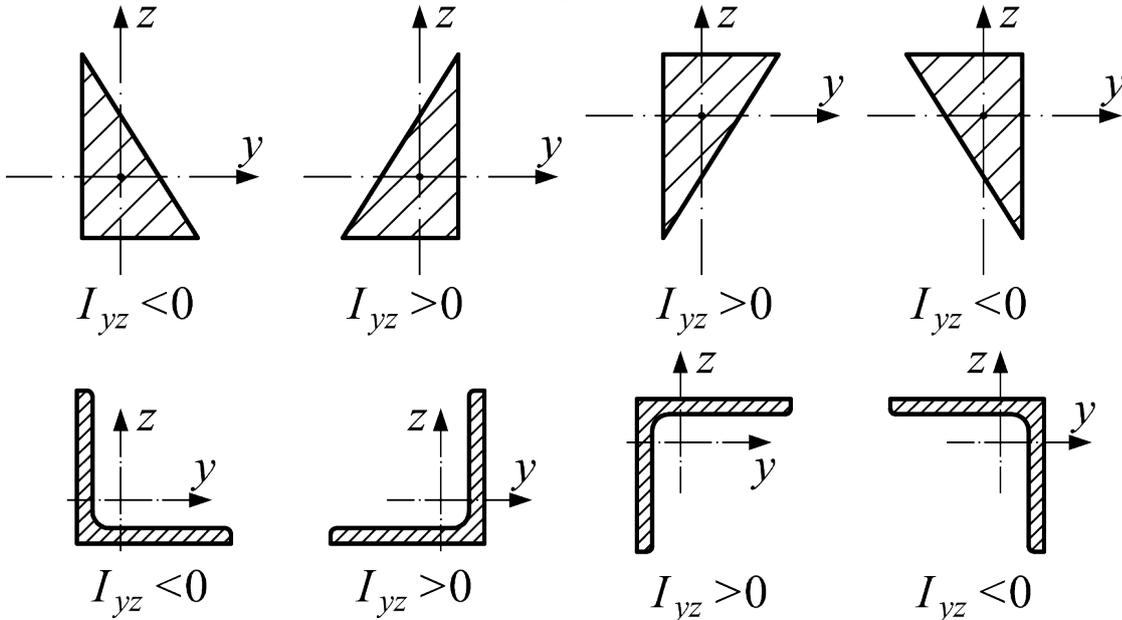
$$A = \pi D t;$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^3 t}{4} \approx 0.3926 D^3 t;$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi D^2 t}{4} \approx 0.7853 D^2 t;$$

$$i_y = i_z = 0.353 D.$$

### Правило знаков для центробежного момента инерции



## Тема С. Перевод единиц. Механические характеристики материалов

### С.1. Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и внесистемными единицами

Величина	Единица ее обозначения		Соотношение единиц
	по СНиП	в системе СИ	
Сила, нагрузка, вес	килограмм-сила (кгс) тонна-сила (тс)	ньютон (Н) килоньютон (кН)	1 кгс = 9.8 Н ≈ 10 Н 1 тс ≈ 10000 Н = 10 кН
Линейная нагрузка, поверхностная нагрузка	килограмм-сила на метр (кгс/м), тонна-сила на метр (тс/м) килограмм-сила на квадратный метр (кгс/м <sup>2</sup> ) тонна-сила на квадратный метр (тс/м <sup>2</sup> )	ньютон на метр (Н/м) килоньютон на метр (кН/м), ньютон на квадратный метр (Н/м <sup>2</sup> ) килоньютон на квадратный метр (кН/м <sup>2</sup> )	1 кгс/м ≈ 10 Н/м 1 тс/м ≈ 10 кН/м 1 кгс/м <sup>2</sup> ≈ 10 Н/м <sup>2</sup> 1 тс/м <sup>2</sup> ≈ 10 кН/м <sup>2</sup>
Напряжение, давление, модуль упругости	килограмм-сила на квадратный миллиметр (кгс/мм <sup>2</sup> ), килограмм-сила на квадратный сантиметр (кгс/см <sup>2</sup> ) тонна-сила на квадратный метр (тс/м <sup>2</sup> )	паскаль (Па) (1 Па ≈ 0.1 миллиметра водного столба), мегапаскаль (МПа)	1 кгс/мм <sup>2</sup> ≈ 10 <sup>7</sup> Па = 10 МПа 1 кгс/см <sup>2</sup> ≈ 10 <sup>5</sup> Па = 0.1 МПа 1 тс/м <sup>2</sup> ≈ 10 <sup>4</sup> Па = 10 кПа
Момент силы	килограмм-сила-метр (кгс·м) тонна-сила-метр (тс·м)	ньютон-метр (Н·м) килоньютон-метр (кН·м)	1 кгс·м ≈ 10 Н·м 1 тс·м ≈ 10 кН·м

$$\begin{array}{llll}
 1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}; & 1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2; & 1 \text{ м}^3 = 10^6 \text{ см}^3; & 1 \text{ м}^4 = 10^8 \text{ см}^4; \\
 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}; & 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2; & 1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3; & 1 \text{ см}^4 = 10^{-8} \text{ м}^4; \\
 1 \text{ Н} = 10^{-3} \text{ кН}; & 1 \text{ Н} = 10^{-6} \text{ МН}; & 1 \text{ кН} = 10^{-3} \text{ МН}; & 1 \text{ тс} = 10 \text{ кН}; \\
 1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}; & 1 \text{ МН} = 10^3 \text{ Н}^2; & 1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}; & 1 \text{ кгс} = 10 \text{ Н}; \\
 1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ кПа} = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ МПа} = 1 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ МН} = 100 \text{ тс}; \\
 1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}; & 1 \text{ кПа} = 10^{-3} \text{ МПа}; & 1 \text{ МПа} = 10^3 \text{ кПа}; & 1 \text{ МПа} = 10 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}; \\
 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 10 \text{ МПа}. & & & 
 \end{array}$$

## С.2. Механические характеристики материалов

Материал	$E$ , МПа	$G$ , МПа	$\alpha$ , $\frac{1}{\text{град}}$	$\gamma$ , $\frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$
Сталь	$2.06 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$125 \cdot 10^{-7}$	78.5
Медь прокатная	$1.1 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$165 \cdot 10^{-7}$	88.9
Серый чугун	$1.18 \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^4$	$100 \cdot 10^{-7}$	68.0÷74.0
Дерево вдоль волокон	$1 \cdot 10^4$	$0.055 \cdot 10^4$	$20 \div 40 \cdot 10^{-7}$	5.5÷7.4

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- Обозначения:  $E$  — модуль упругости при растяжении материала;  
 $G$  — модуль упругости при сдвиге;  
 $\nu$  — коэффициент Пуассона;  
 $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения;  
 $\gamma$  — объёмный вес.

## Тема D. Устойчивость сжатых стержней

Значения  $\varphi$  для дерева определяются в соответствии с п.7.3 СП 64.13330.2017 «Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—25—80»:

$$\varphi = 1 - 0.8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2, \quad \text{если } \lambda \leq 70;$$

$$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \quad \text{если } \lambda > 70,$$

где  $\lambda$  — гибкость стержня;  
 $\mu$  — коэффициент приведения длины;  
 $l$  — длина стержня;  
 $i_{\min}$  — минимальный радиус инерции.

В случае стали С245, значение  $\varphi$  приведены в таблицы ниже и определены согласно выражению (8) СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—23—81\*»:

$$\varphi = \frac{0.5 \left( \delta - \sqrt{\delta^2 - 39.48\bar{\lambda}^2} \right)}{\bar{\lambda}^2}.$$

Значение коэффициента  $\delta$  определяется по формуле

$$\delta = 9.87 (1 - \alpha + \beta\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}^2.$$

где  $\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{R_y}{E}}$  — условная гибкость стержня;  
 $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты, определяемые по таблице 7 СП 16.13330.2011.

Для типов сечений «б» по таблице 7 СП 16.330.2017  $\alpha = 0.04$  и  $\beta = 0.09$ , а также согласно таблицы В.5 для стали С245  $R_y = 235$  МПа;  $E = 2.06 \cdot 10^5$  МПа значения коэффициента  $\varphi$  приведены в таблице

$\varphi$	Материал	Гибкость $\lambda$									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\varphi$	Сталь С245	0.99	0.98	0.95	0.91	0.87	0.82	0.77	0.70	0.63	0.57
	Дерево	0.99	0.97	0.93	0.87	0.80	0.71	0.61	0.47	0.37	0.30
$\varphi$	Материал	Гибкость $\lambda$									
		110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$\varphi$	Сталь С245	0.50	0.44	0.39	0.35	0.31	0.28	0.25	0.23	0.21	0.19
	Дерево	0.25	0.21	0.18	0.15	0.13	0.12	0.10	0.09	0.08	0.08

Расчётное сопротивление стали  $R_y$  определяется согласно СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—23—81\*».

В случае, если гибкость стержня  $\lambda$  превышает предельную гибкость  $\lambda_{\text{пред}}$ , критическое напряжение определяется по формуле Эйлера

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{Э}}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{A(\mu l)^2}.$$

В случае, если гибкость стержня  $\lambda$  не превышает предельную гибкость  $\lambda_{\text{пред}}$ , критическое напряжение определяется по формуле В. Ф. Ясинского

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda,$$

где  $a$  и  $b$  — эмпирические коэффициенты, определяемые для различных материалов на основе экспериментальных данных.

Табл. D.1. Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  для некоторых материалов, используемых в формуле Ф. С. Ясинского

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$\lambda_{\text{пред}}$
Сталь	310	1.14	100
Дерево	40	0.203	70

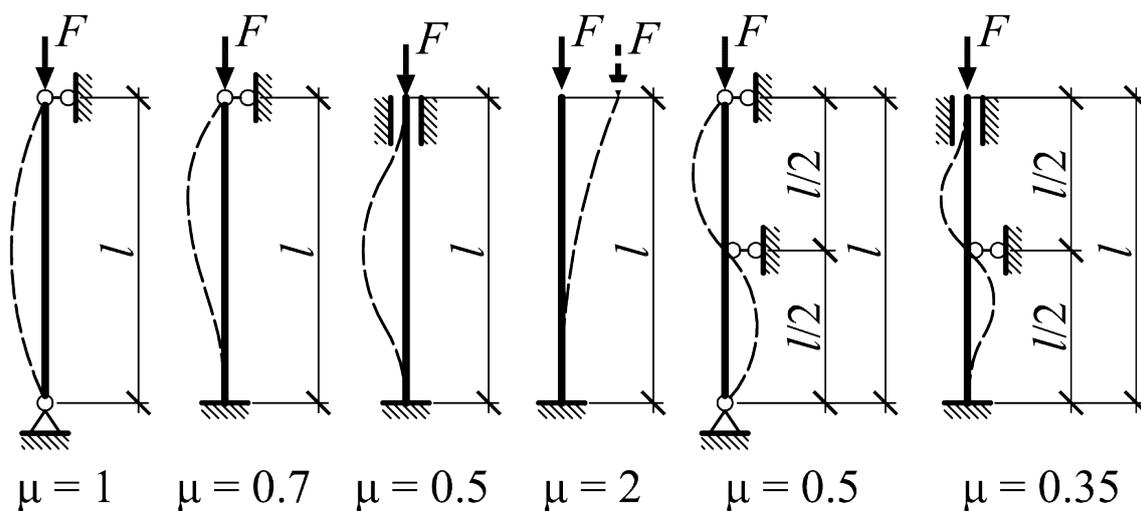


Рис. D.1. Зависимость коэффициента приведения длины  $\mu$  от схемы закрепления стержня

## Тема Е. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок

### Е.1. Правила построения и контроля эпюр (метод начальных параметров)

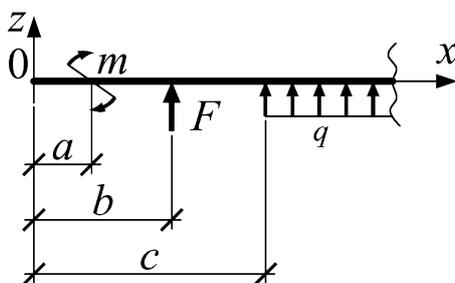


Рис. Е.1. К методу начальных параметров: положительное направление внешних нагрузок

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[ \sum m(x-a) + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} \right];$$

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[ \sum m \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} \right],$$

- где  $E$  — Модуль упругости балки;  
 $I$  — момент инерции балки относительно оси  $y$ ;  
 $a$  — расстояние от начала координат до точки приложения изгибающего момента  $m$ ;  
 $b$  — расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы  $F$ ;  
 $c$  — расстояние от начала координат до начала распределённой нагрузки  $q$ .

Использование приведённого выражения может быть возможно при соблюдении двух из четырёх правил Клебша: 1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят. 2. При действии на балку распределённой нагрузки, не доходящей до правого конца балки, её необходимо продолжить до правого концевого сечения, одновременно уравнивая её противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности.

Дифференциальная зависимость между внутренними силовыми факторами может быть записана:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^3\varphi}{dx^3} = EI \frac{d^4w}{dx^4}.$$

Тогда правила построения эпюр углов поворота и прогибов могут быть сформулированы:

1. На участке, где эпюра поперечных сил  $Q$  положительна, эпюра углов поворота  $\varphi$  имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра поперечных сил  $q$  отрицательная, эпюра углов поворота  $\varphi$  имеет выпуклость вверх.

2. В точке, где эпюра поперечных сил  $Q$  проходит через ноль, или происходит скачок через ноль, на эпюре углов поворота  $\varphi$  в этом месте точка перегиба (т. п.).

3. В точке, где эпюра изгибающего момента  $M$  проходит через ноль, на эпюре углов поворота  $\varphi$  в этом месте экстремум (ext).

4. В точке, где на эпюре изгибающего момента  $M$  наблюдается скачок, на эпюре углов поворота  $\varphi$  точка излома (т. и.).

5. На участке, где эпюра изгибающего момента  $M$  положительна, эпюра прогибов  $w$  имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра изгибающего момента  $M$  отрицательная, эпюра прогибов  $w$  имеет выпуклость вверх.

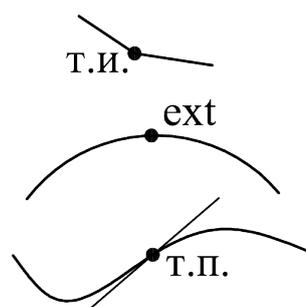
6. В точке, где эпюра изгибающего момента  $M$  проходит через ноль, или происходит скачок через ноль, на эпюре прогибов  $w$  в этом месте точка перегиба (т. п.).

7. В точке, где эпюра углов поворота  $\varphi$  проходит через ноль, на эпюре прогибов  $w$  в этом месте экстремум (ext).

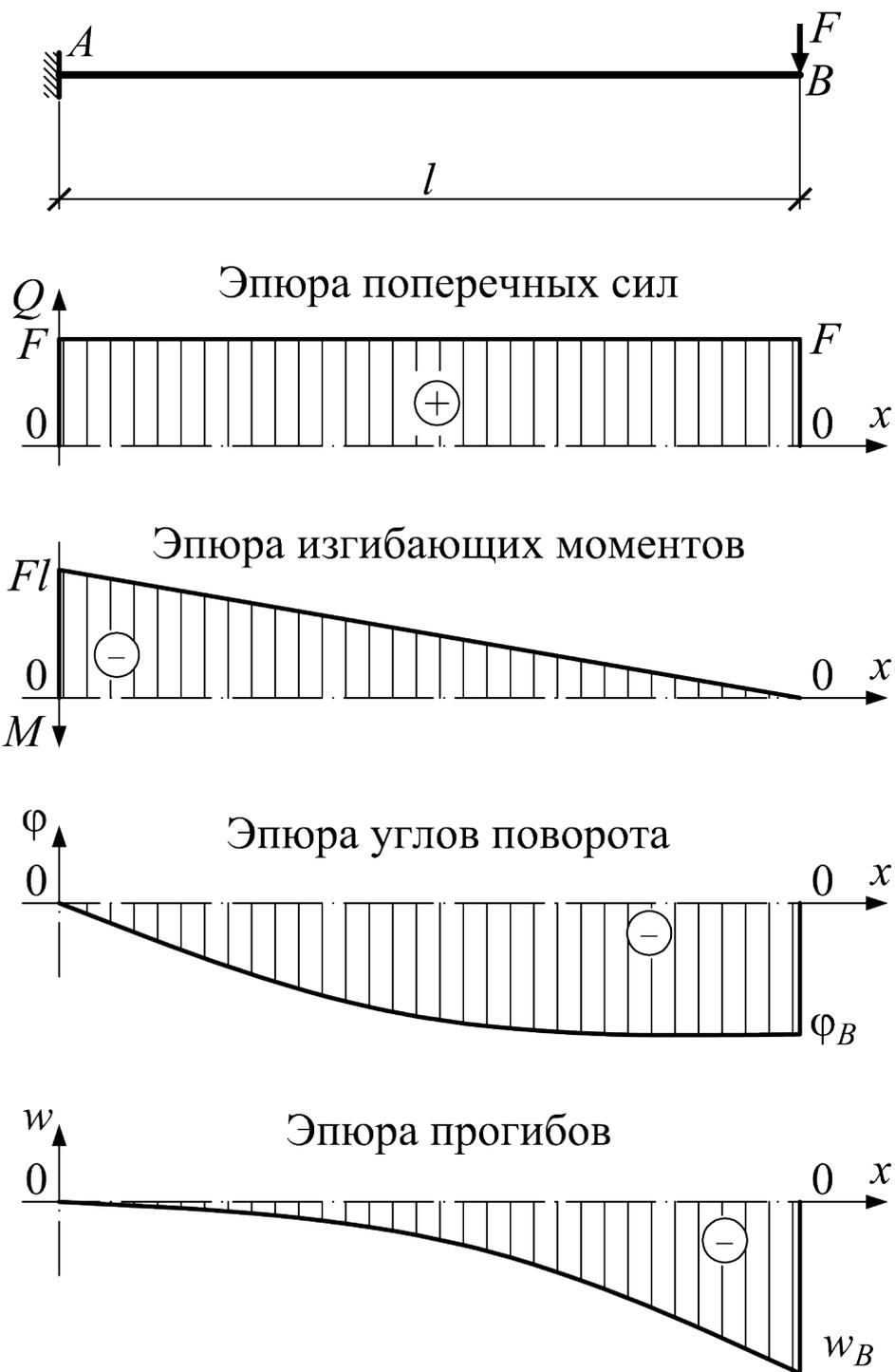
Сокращённо данные правила могут быть представлены графически:

Нагрузка					0	—		
$Q$					ext	0		
$M$					т.п.	ext	0	
$\varphi$						т.п.	ext	0
$w$							т.п.	ext

где — парабола;  
 — излом;  
 — скачок;  
ext — экстремум;  
т.п. — точка перегиба.

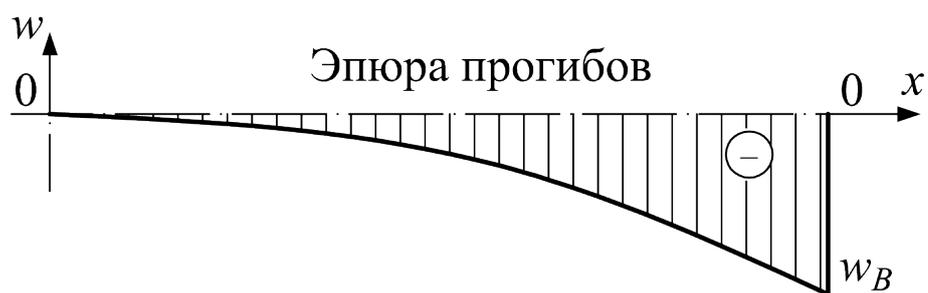
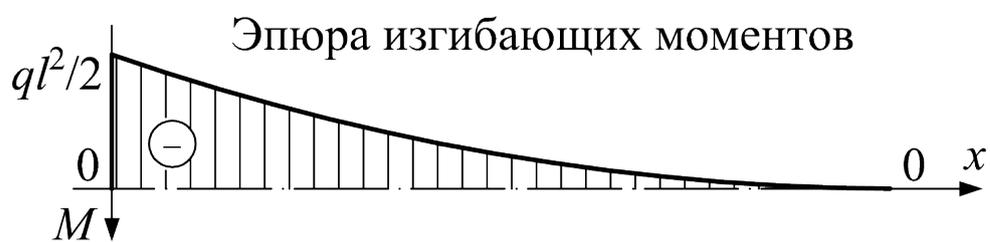
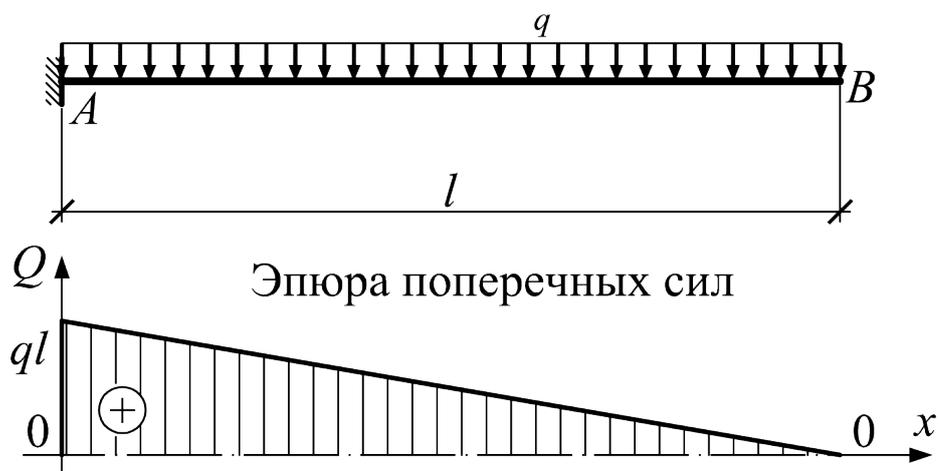


**Е.2. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок**



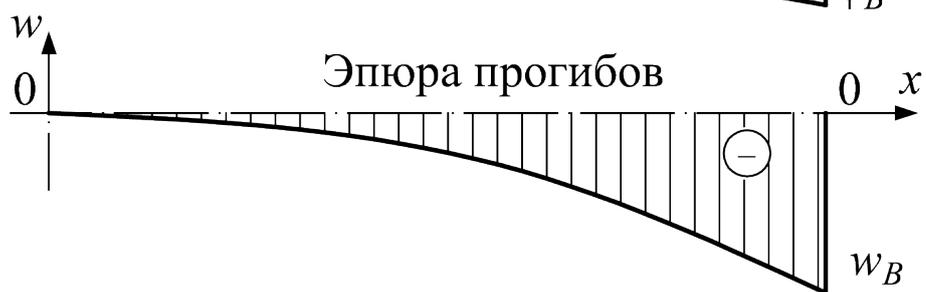
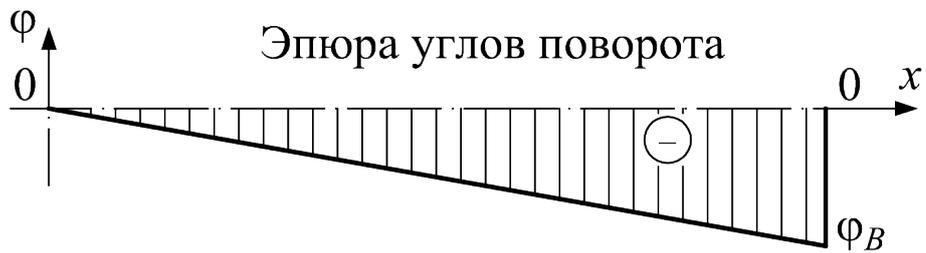
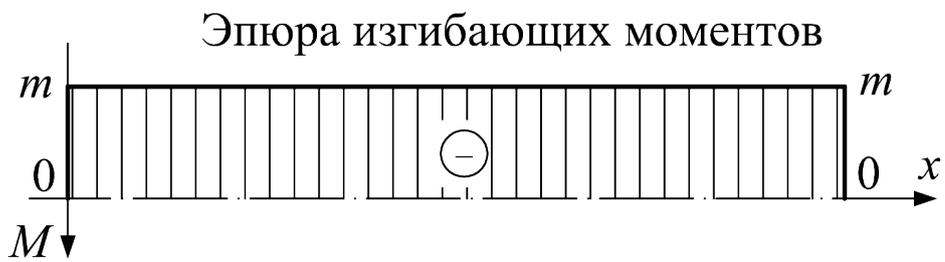
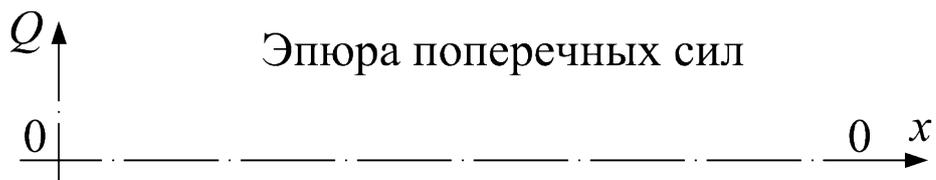
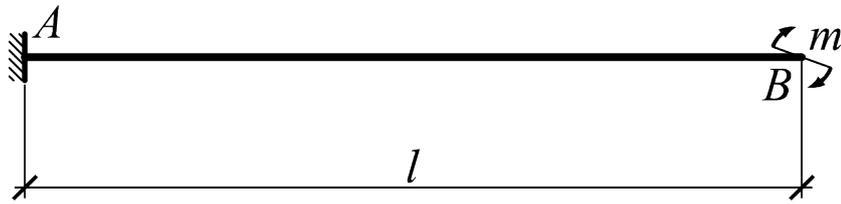
$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{Fl^2}{EI};$$

$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}.$$



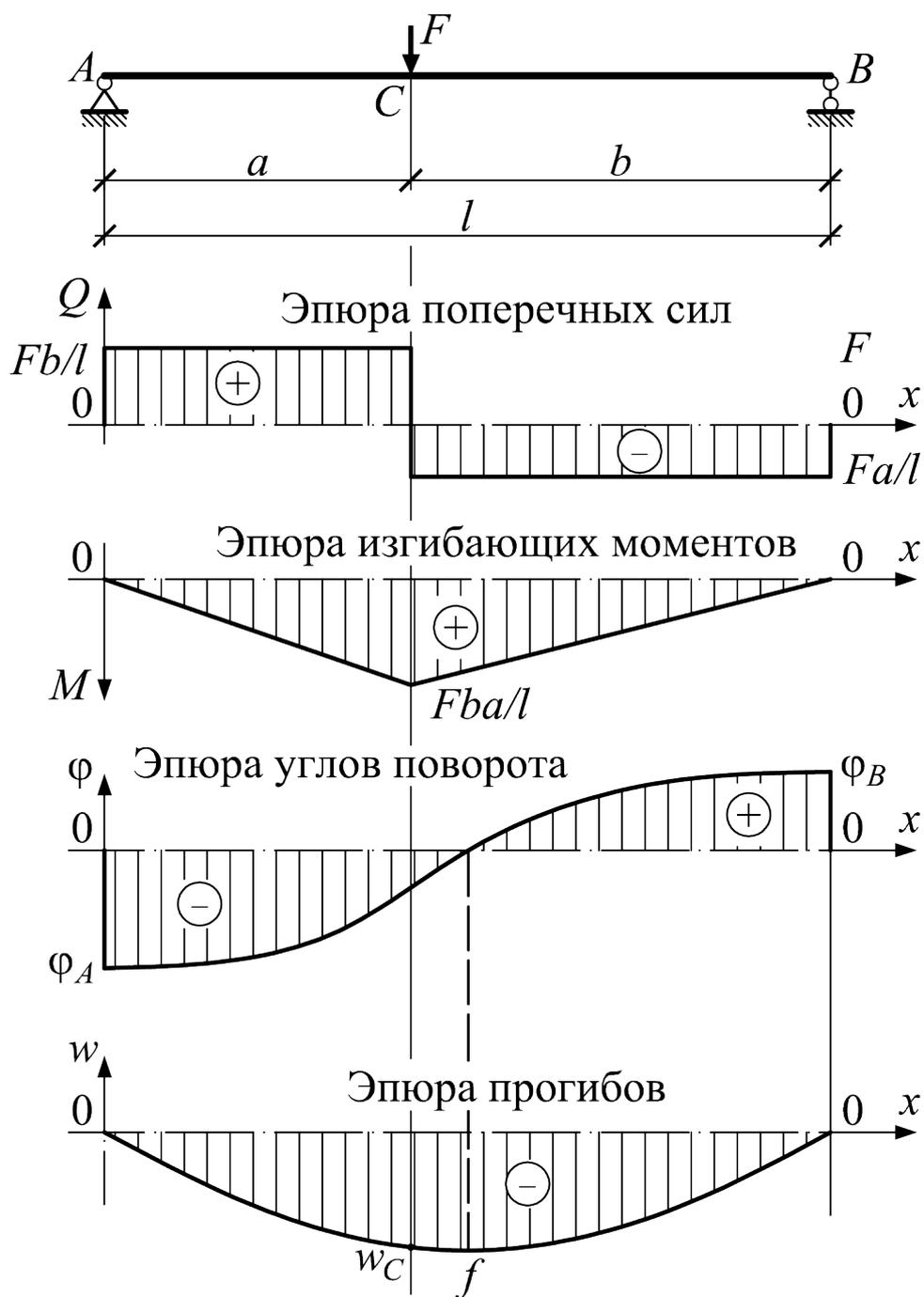
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI};$$

$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$



$$\varphi_B = -\frac{ml}{EI};$$

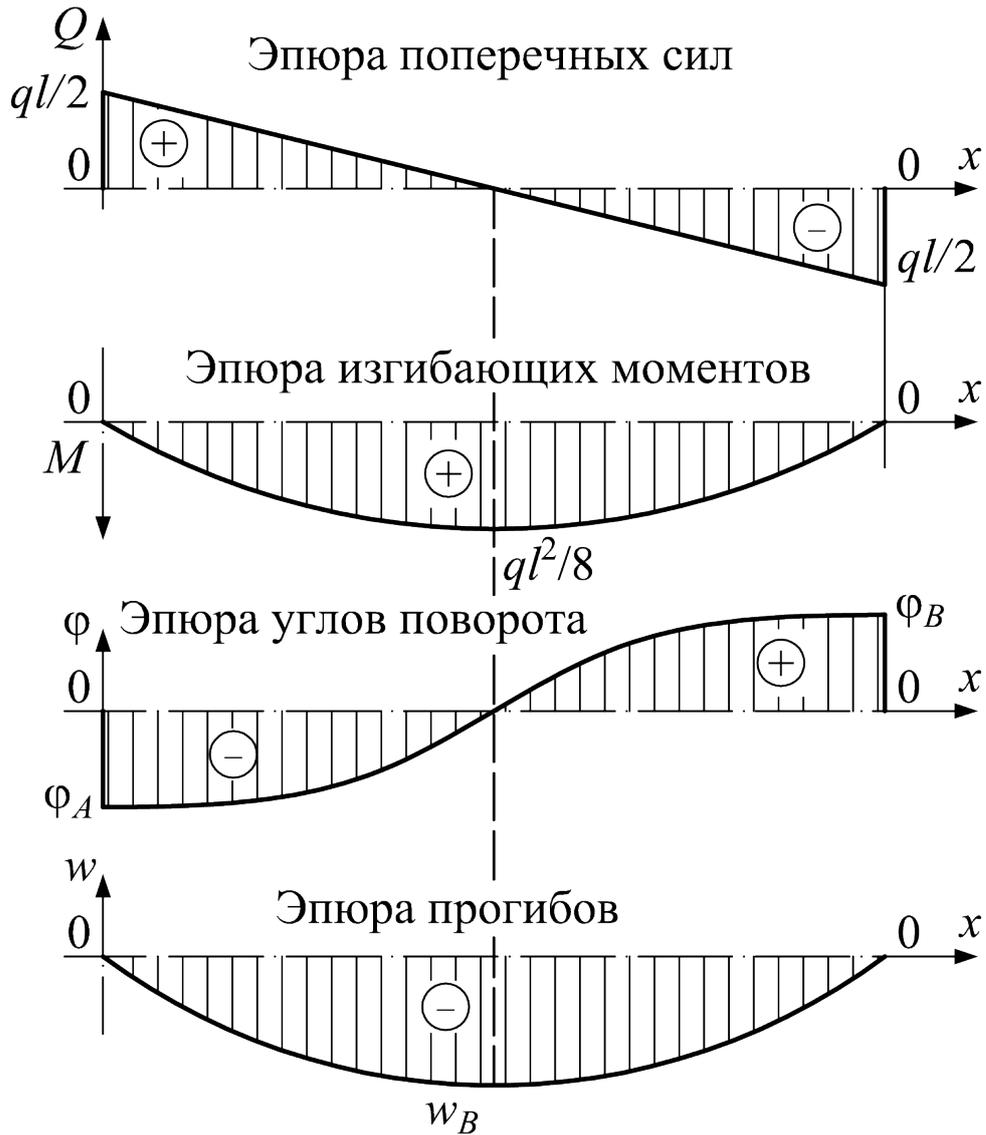
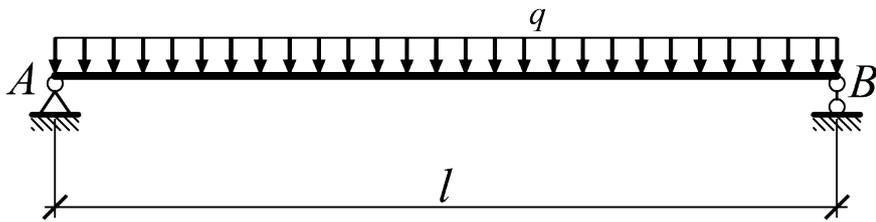
$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{ml^2}{EI}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{Fba}{EI} (a+2b); \quad \varphi_B = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EI} (l^2 - a^2);$$

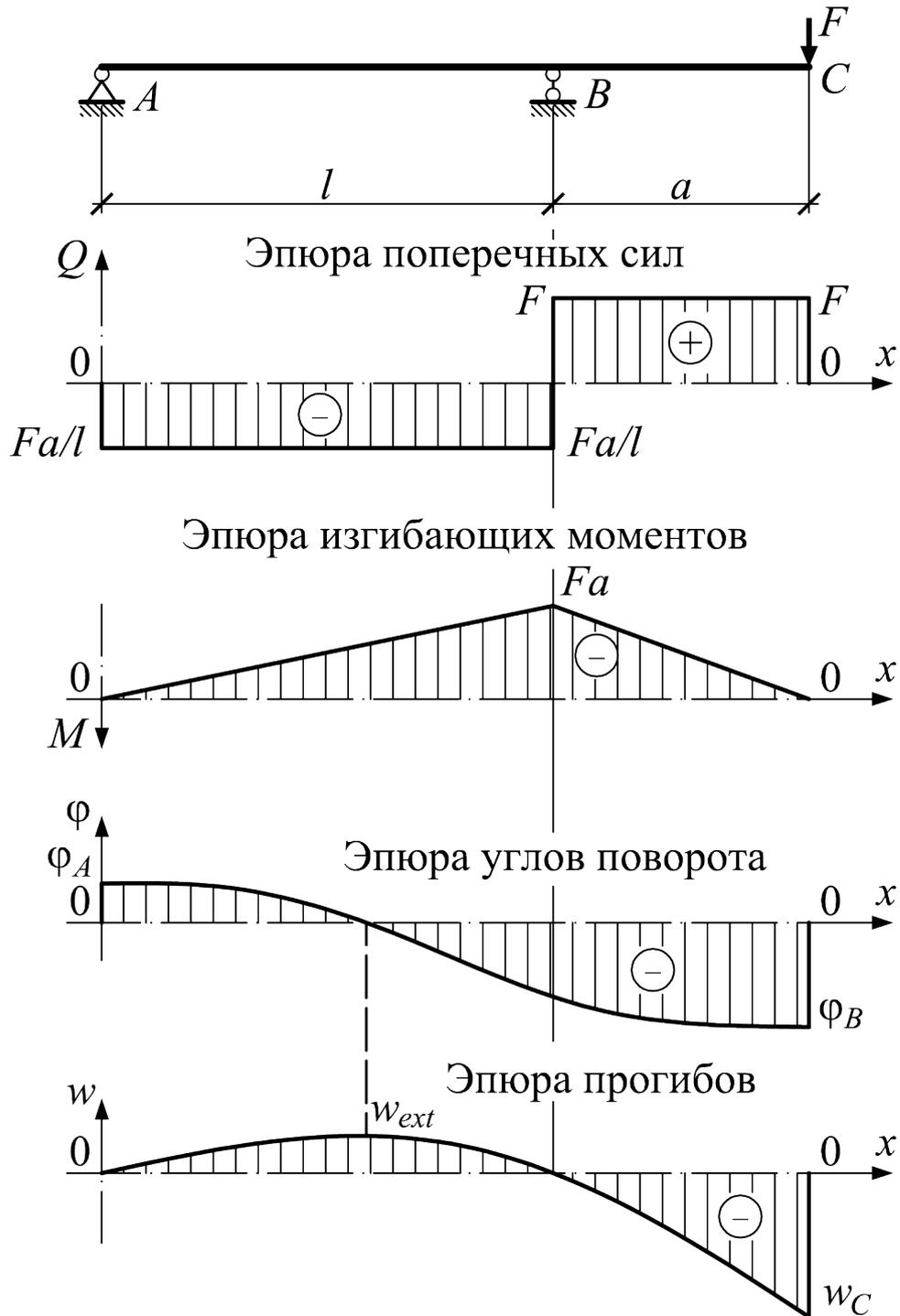
$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F}{EI} \frac{(ab)^2}{l}, \quad \text{при } x = a;$$

$$f = w_{\max} = w_C = -\frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}, \quad \text{при } x = a = b = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; \quad \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI};$$

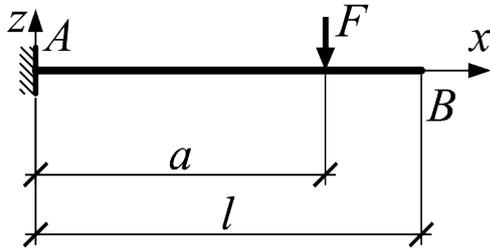
$$w_{\max} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad \text{при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{F a l}{E I}; \quad \varphi_C = -\frac{1}{6} \frac{F a}{E I} (2l + 3a);$$

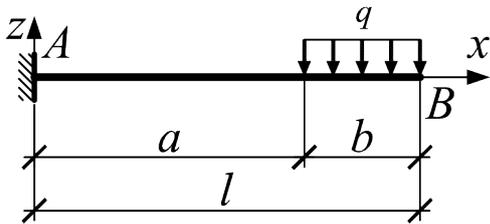
$$w_{ext} = 0.0642 \frac{F a l^2}{E I}; \quad \text{при } x = 0.578l;$$

$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F a^2}{E I} (l + a).$$



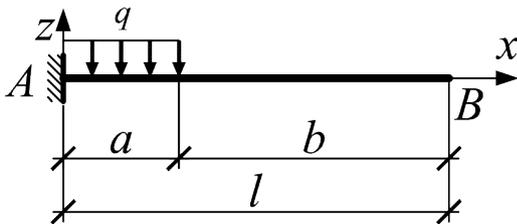
$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{Fa^2}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{6} \frac{Fa^2}{EI} (3l - a).$$



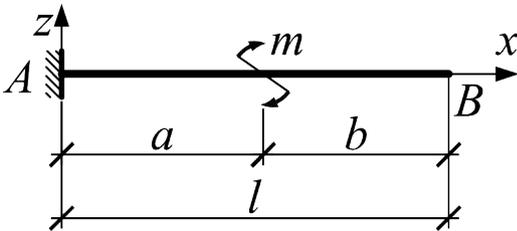
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI} \left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right);$$

$$w_B = -\frac{1}{24} \frac{ql^4}{EI} \left(3 - 3\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4}\right).$$



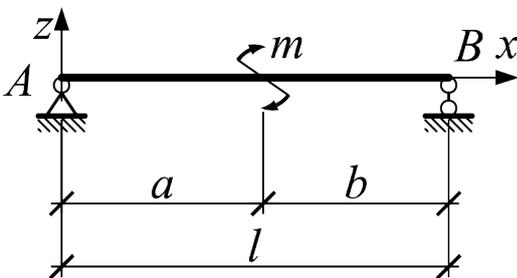
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI} (4l - a).$$



$$\varphi_B = -\frac{ma}{EI};$$

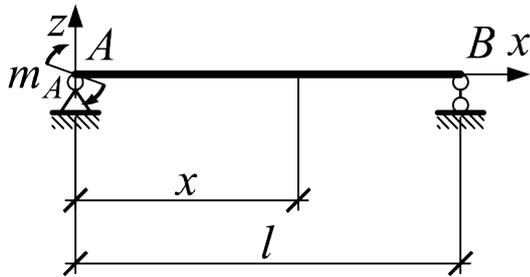
$$w_B = -\frac{1}{2} \frac{ma(l+b)}{EI}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{ml}{EI} \left(1 - 3\frac{b^2}{l^2}\right);$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{ml}{EI} \left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right);$$

$$w(a) = -\frac{1}{3} \frac{mab}{EI} \left(\frac{a-b}{l}\right) \text{ при } x = a.$$

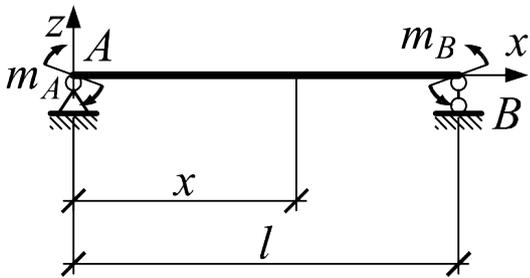


$$\varphi_A = -\frac{1}{3} \frac{ml}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{ml}{EI};$$

$$w_{\max} = -0.0642 \frac{ml^2}{EI};$$

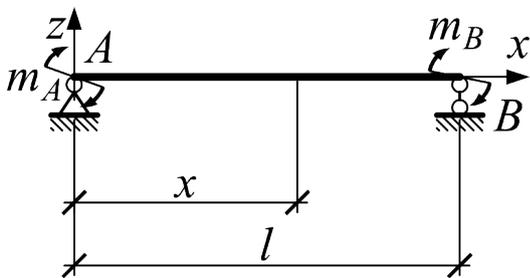
$$w = -\frac{1}{16} \frac{ml^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

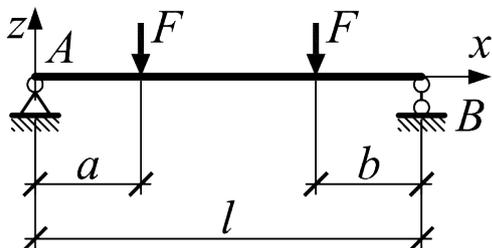
$$w_{\max} = -\frac{1}{16} \frac{(m_A + m_B) l^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

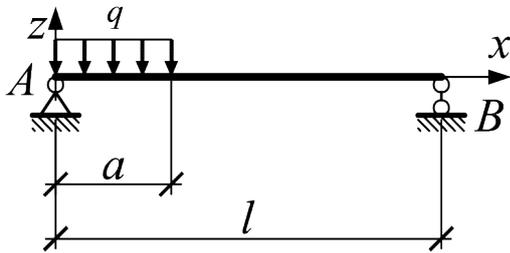
$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

$$w = -\frac{1}{16} \frac{(m_A - m_B) l^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI} (l - a);$$

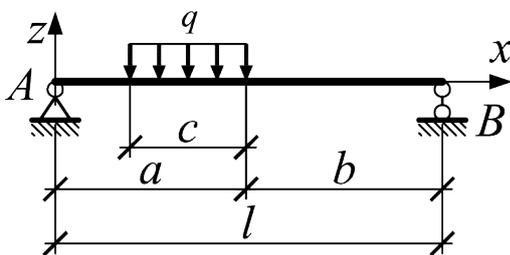
$$w_{\max} = -\frac{1}{24} \frac{Fl^3}{EI} \left( 3 \frac{a}{l} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a}{2l}\right);$$

$$\varphi_B = \frac{1}{12} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a^2}{2l^2}\right);$$

$$w = -\frac{1}{24} \frac{a^3 b}{EI} \left(4 - 3\frac{a}{l}\right).$$

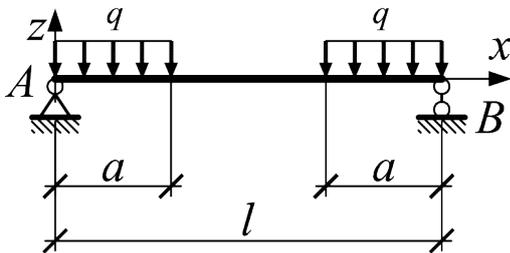


$$\varphi_A = \frac{1}{24} \frac{qbc}{EI} \left[4a(l+b) - c^2\right];$$

$$\varphi_B = \frac{1}{24} \frac{qac}{EI} \left[4b(l+a) - c^2\right];$$

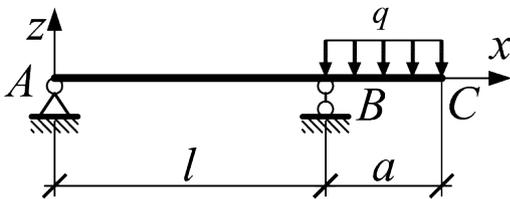
$$w = -\frac{1}{6} \frac{qc}{EI} \left[\frac{ab}{l} \left(2al - 2a^2 - \frac{c}{4}\right) + \frac{c^3}{64}\right]$$

при  $x = a$ .



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{12} \frac{qa^2}{EI} (3l - 2a);$$

$$w_{\max} = -\frac{1}{48} \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2\frac{a^2}{l^2}\right) \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{12} \frac{qa^2 l}{EI};$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{qa^2 l}{EI};$$

$$\varphi_C = \frac{1}{6} \frac{qa^2}{EI} (a+l);$$

$$w_C = -\frac{1}{24} \frac{qa^2}{EI} (4l+3a);$$

$$w_{\max} = 0.0321 \frac{qa^2 l^2}{EI} \text{ при } x = 0.577l.$$